

## 2 Introducción a la teoría del Compressive Sensing

En primer lugar se realizará una comparación entre el teorema de muestreo de Nyquist y la teoría del Compressive Sensing. A continuación, se definen las propiedades que deben cumplir las señales así como la matriz de mediciones  $\Phi$  que se emplean en los algoritmos que implementan esta nueva técnica. A continuación, se resolverá el problema de reconstrucción de la señal original mediante la solución del problema de optimización  $\min \|s\|_1$  sujeto a  $y = \Phi s$ . Y por último, se abarcará el problema de diseño de la matriz de mediciones  $\Phi$ , dentro de esta sección introducimos una noción clave que ha resultado ser muy útil en el estudio de la robustez del Compressive Sensing, conocida como Propiedad de Isometría Restringida (RIP).

El teorema de Shanon/Nyquist especifica que para impedir la pérdida de información al capturar una señal, la tasa de muestreo debe ser al menos el doble de su ancho de banda. En muchas aplicaciones, incluidas imagen digital y video cámara, la frecuencia de Nyquist es muy elevada teniendo que tomar por ello demasiadas muestras de la señal lo que conlleva a la necesidad de comprimir la información antes de almacenarla o transmitirla. En otras aplicaciones como sistemas de imagen (escáneres médicos, radares...) y convertidores analógico-digitales, aumentar el número de muestras conlleva un aumento del costo.

Debido a las grandes limitaciones que presenta la teoría clásica de muestreo para reconstruir señales de alta frecuencia surge la necesidad de estudiar nuevas herramientas. El Compressive Sensing es una nueva teoría que establece que una señal poco densa en algún dominio puede ser reconstruida con alta probabilidad a partir de un conjunto reducido de proyecciones aleatorias usando un proceso de optimización. [1]

### 2.1 Teorema de muestreo de Shannon

Establece que una señal  $x_a(t)$  con ancho de banda limitado, puede ser reconstruida exactamente a partir de una serie de muestras provenientes de un proceso de muestreo, sólo si la frecuencia de muestreo es mayor que la frecuencia de Nyquist, o sea mayor que el doble de su ancho de banda

$$w_{ny} = 2 \cdot w_{max}$$

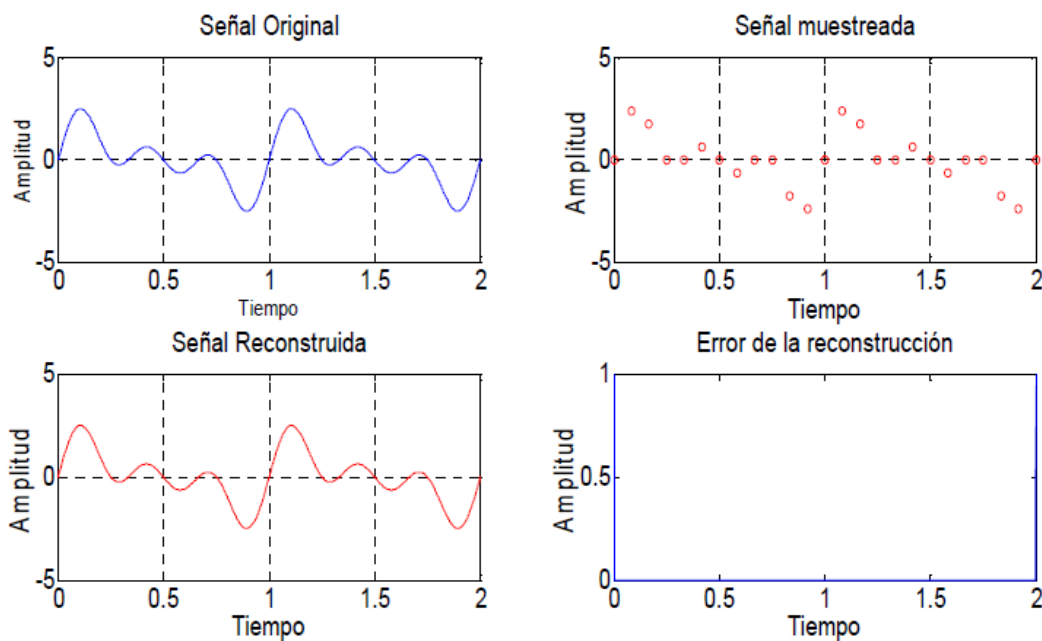
Si se cumple esta condición, la señal analógica original se puede reconstruir a partir de sus muestras mediante la siguiente función de interpolación:

$$(1) \quad g(t) = w_{\max} \cdot T \cdot \sin(w_{\max} \cdot t) / \pi \cdot w_{\max} \cdot t$$

Se puede expresar  $x_a(t)$  como:

$$(2) \quad x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \cdot g(t-nT)$$

Donde  $x_a(nT)$  son las muestras de  $x_a(t)$ , en los instantes  $t=nT$  con  $n=1,2,3\dots$  y  $T$  el periodo de muestreo.



**Fig4.** Reconstrucción de una señal utilizando el teorema de muestreo de Shannon. **(a)** Señal original. **(b)** Señal muestreada. **(c)** Señal reconstruida. **(d)** Error de la reconstrucción.

A medida que el ancho de banda de la señal aumenta, también lo hace la frecuencia de muestreo, de forma que para ciertos tipos de señales la tarea de muestreo se hace casi imposible debido a las limitaciones de velocidad en los convertidores analógico-digitales. Aunque esta señal se pudiese muestrear, la cantidad de muestras tomadas para su reconstrucción sería tan elevada que se introducirían problemas de almacenamiento, tiempo de procesamiento, ancho de banda para la transmisión, etc.

Surge la necesidad de introducir nuevas teorías que sean capaces de resolver las deficiencias de la teoría clásica de muestreo.

En este proyecto se hablará sobre una nueva herramienta para el procesamiento de señales llamada Compressive Sensing.

## 2.2 Compressive Sensing

La técnica del Compressive Sensing (CS) reduce considerablemente el número de muestras necesarias para la reconstrucción de una señal, reduciendo la frecuencia a la cual se debe muestrear la señal.

La teoría del Compressive Sensing establece que una señal poco densa o sparse puede ser reconstruida con alta probabilidad a partir de un conjunto de muestras provenientes de su proyección aleatoria, siempre y cuando la señal cumpla con la condición de escasez o poca densidad en algún dominio que denominamos diccionario  $\Psi$  y que éste a su vez sea incoherente con la matriz de medición  $\Phi$  [1]. En apartados posteriores se definen las dos premisas fundamentales para el CS: escasez e incoherencia.

En este método, el número de muestras necesarias es mucho menor que la señal original, lo que implica:

- menor frecuencia de muestreo
- menor cantidad de datos
- menor uso de los recursos de almacenaje
- menor requerimiento de velocidad de los convertidores analógico-digitales
- menor uso de ancho de banda para la transmisión de los datos, es decir, menor tiempo requerido para la transmisión de los datos

### 2.2.1 Señales compresibles

Sea  $x$  una señal real, finita y discreta en el tiempo, que podemos expresar como vector columna de dimensión  $n$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $x[n]$ , con  $n=1,2,\dots,n$ . Cualquier señal en  $\mathbb{R}^n$  puede ser representada en términos de una base de  $n \times 1$  vectores  $\{\Psi_i\}_{i=1}^n$ , (suponemos que la base es ortonormal). Usando la matriz  $n \times n$   $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n]$ , con los vectores  $\Psi_i$  como columnas, la señal  $x$  puede expresarse como:

$$(3) \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n s_i \Psi_i = \mathbf{s} \Psi$$

con

$$(4) \quad s_i = \langle \mathbf{x}, \Psi_i \rangle = \Psi_i^T \mathbf{x}$$

dónde  $^T$  denota matriz traspuesta.  $x$  y  $s$  son representaciones equivalentes de la señal, con  $x$  en el dominio del tiempo o del espacio y  $s$  en el dominio  $\Psi$ .

La señal  $x$  es  $k$ -sparse si puede expresarse como combinación lineal de sólo  $k$  vectores base, es decir, sólo  $k$  de los  $s_i$  coeficientes son distintos de cero y  $(n-k)$  coeficientes son cero. El caso de interés es cuando la señal cumple  $k \ll n$ . La señal  $x$  es compresible si la representación (3) tiene un pequeño número de componentes distintos de cero siendo la mayoría de ellos iguales a cero.

## 2.2.2 Propiedad de escasez (sparsity)

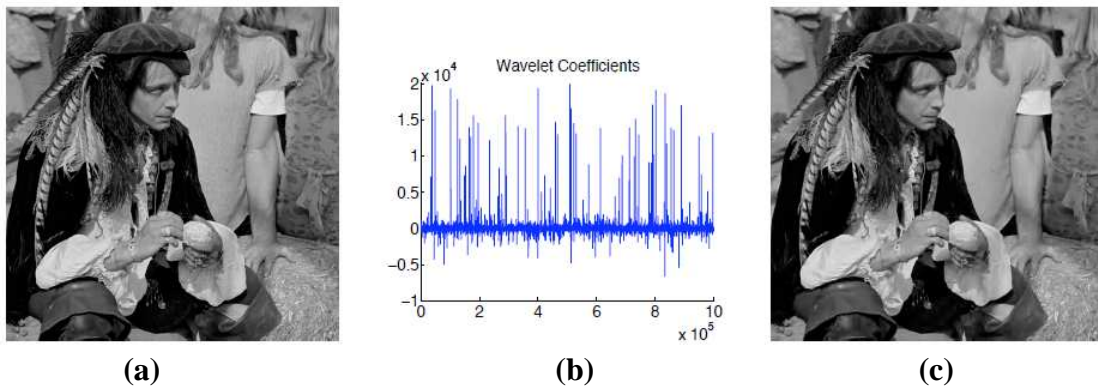
Se dice que una señal  $x$  es  $k$ -sparse en algún dominio  $\Psi \in \mathbb{R}^m$ , cuando puede ser representada por una combinación lineal de  $k$  átomos que provienen del dominio, dónde los átomos son los vectores columna que conforman  $\Psi$ .

Si se representa la base  $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m]$ , donde cada componente de  $\Psi$  es un vector columna entonces se podría escribir  $x$  de la siguiente forma:

$$(5) \quad \mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^k s_i \Psi_i = \Psi \mathbf{s}$$

Donde  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n]$  es un vector con  $k$  componentes distintas de cero, donde los  $s_i$  representan la contribución del átomo  $\Psi_i$  a la definición de la señal  $x$ .

Vemos un ejemplo expuesto por *Emmanuel Candès* y *Michael Wakin*, [2]. CS explota el hecho de que muchas de las señales naturales son sparse o compresibles en el sentido de que tienen representaciones concisas cuando se expresan en la base adecuada. Consideramos por ejemplo, la figura 5.a) y su transformada wavelet en b). Aunque casi todos los píxeles de la imagen tienen valores distintos de cero los coeficientes wavelet ofrecen una representación concisa: la mayoría de los coeficientes son pequeños, y los pocos coeficientes principales capturan casi toda la información.



**Fig5. a)** Imágen original con valores de píxeles en el rango de  $[0,255]$  y **b)** sus coeficientes de transformada wavelet, relativamente pocos coeficientes capturan la mayor parte de la energía de la señal. **c)** Reconstrucción obtenida a partir de los coeficientes wavelet.

Matemáticamente hablando, tenemos un vector  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  que expresamos en una base ortonormal (por ejemplo una base wavelet)  $\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n]$ , de la siguiente forma:

$$(6) \quad x(t) = \sum_{i=1}^n s_i \Psi_i(t)$$

donde  $s_i$  representa la contribución del átomo  $\Psi_i$  a la definición de la señal  $x$ ,  $s_i = \langle x, \Psi_i \rangle$ .

Ahora la definición de escasez estaría clara: cuando tenemos una señal sparse podemos descartar los coeficientes pequeños sin una pérdida de percepción elevada. Consideremos  $x_k(t)$  formado sólo por las componentes de  $x(t)$  correspondientes a los  $k$  valores de  $x$  distintos de cero, por definición  $x_k := \Psi s_k$  donde  $s_k$  será un vector con sólo  $k$  componentes distintas de cero (el resto de componentes serán cero). Este vector es sparse ya que todas sus componentes salvo unas pocas,  $k$ , valen cero, se denomina entonces  $k$ -sparse. Dado que  $\Psi$  es una base ortonormal, tenemos que  $\|x - x_k\|_{l_2} = \|s - s_k\|_{l_2}$ , y si  $s$  es una señal sparse entonces  $s_k$  será una buena aproximación y por tanto, el error  $\|x - x_k\|_{l_2}$  será pequeño. En resumen, si la señal es sparse podemos despreocupar una gran cantidad de términos sin que suponga una gran pérdida. La figura 5.c) muestra un ejemplo donde la pérdida de percepción es casi inapreciable tras haber descartado el 97,5% de los coeficientes.

### 2.2.3 Propiedad de incoherencia

Por incoherencia entre dos matrices  $\Phi$  y  $\Psi$  se entiende que ningún elemento de la matriz  $\Phi$  puede ser obtenido mediante una combinación lineal de elementos de la matriz  $\Psi$  y viceversa.

En [2] vemos la siguiente definición:

La coherencia entre la matriz de mediciones  $\Phi$  y la base  $\Psi$  viene dada por

$$(7) \quad \mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq k, j \leq n} |\langle \phi_k, \psi_j \rangle|$$

Si  $\Phi$  y  $\Psi$  contienen elementos correlacionados, la coherencia entre ellos será grande. De lo contrario, será pequeña. En ambos casos,  $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{n}]$ .

Compressive sensing está basado en la incoherencia entre las dos matrices, veamos un ejemplo:  $\Phi$  es la base canónica  $\phi_k(t) = \delta(t - k)$  y  $\Psi$  es la base de Fourier  $\psi_j(t) = n^{-1/2} e^{i2\pi jt/n}$ . En este caso la pareja tiempo-frecuencia obedece a  $\mu(\Phi, \Psi) = 1$ , y por lo tanto tenemos la máxima incoherencia.

Las matrices aleatorias son altamente incoherentes con respecto a cualquier base fija  $\Psi$ . Seleccionamos una base ortonormal uniforme aleatoria que podemos construir ortonormalizando  $n$  vectores muestra independientes y uniformes. Luego, con alta probabilidad la coherencia entre  $\Phi$  y  $\Psi$  será  $\sqrt{2 \cdot \log n}$ . Por extensión, formas de ondas aleatorias con entradas i.i.d, por ejemplo entradas Gaussianas o binarias  $\pm 1$ , presentarán una baja coherencia con respecto a cualquier base  $\Psi$ .

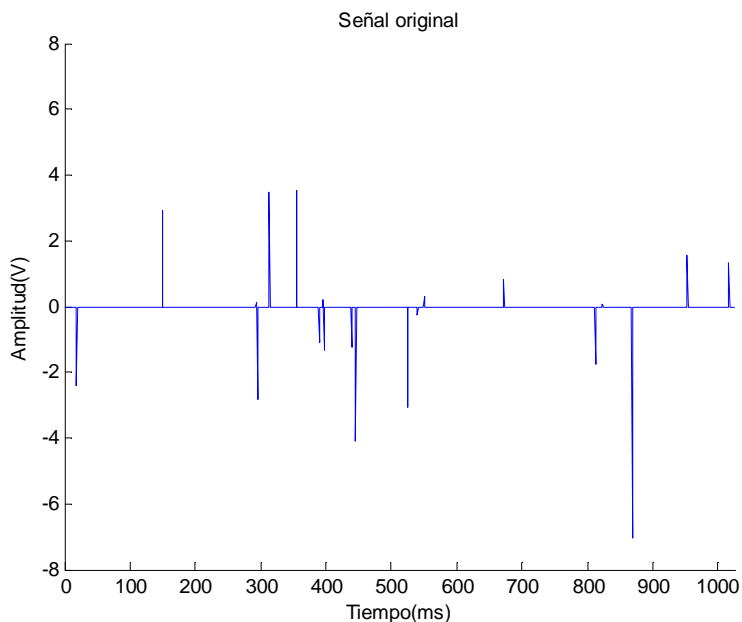
## 2.2.4 Dicionarios

Un diccionario es un conjunto de funciones básicas mediante el cual se pueden representar señales como una combinación lineal de varias funciones de ese conjunto. A cada elemento del diccionario se le denomina átomo del diccionario.

A continuación, se describen una serie de diccionarios que se utilizarán en la caracterización de señales sparse y en la reconstrucción de las mismas.

### 2.2.4.1 Diccionario en el dominio del tiempo

En el dominio del tiempo el diccionario se reduce simplemente a la matriz identidad puesto que se puede expresar una señal sparse en dicho dominio como combinación lineal de los elementos contenidos en ese diccionario.



**Fig6.** Ejemplo de una señal sparse en el dominio del tiempo. Observamos que muy pocas de sus  $n = 1024$  muestras son distintas de cero, en concreto sólo  $k = 20$  de las  $n$  muestras valen cero.

Como podemos ver la mayoría de las componentes de la señal son cero, y se puede expresar como una combinación lineal de átomos de  $\Psi$ .

Entonces la señal  $x$  puede ser expresada como

$$(8) \quad x = \Psi \theta$$

### 2.2.4.2 Diccionario en el dominio de la frecuencia

Este diccionario se genera a partir de la Transformada Discreta de Fourier (DFT). Un diccionario en el dominio de Fourier, es una colección de ondas sinusoidales  $\Lambda_{(w,v)}$ , donde  $w \in [0,2\pi]$  es la frecuencia angular, y  $v$  indica el tipo de fase, si es coseno o seno.

$$(9) \quad \Lambda_{(w,0)} = \cos(\omega t) \quad \Lambda_{(w,1)} = \sin(\omega t)$$

Ahora se definen las frecuencias para las que estarán definidos los cosenos:

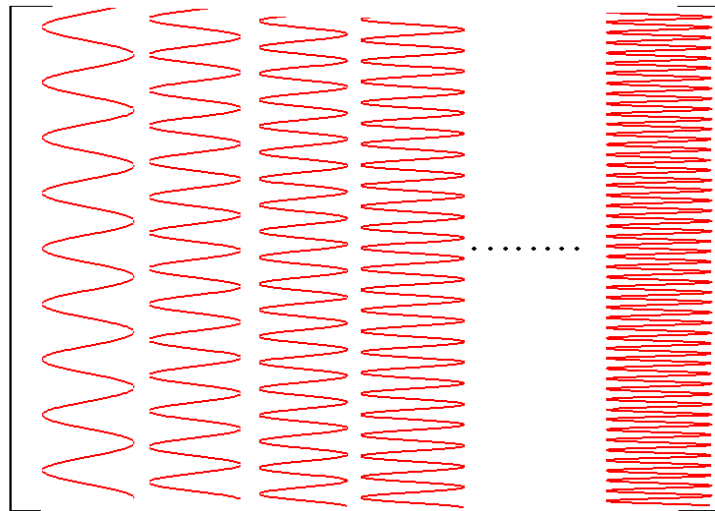
$$(10) \quad \omega_k = 2\pi k / n \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n/2$$

y los senos:

$$(11) \quad \omega_k = 2\pi k / n \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, (n/2) - 1$$

dónde  $n$  es el número de columnas que tendrá el diccionario.

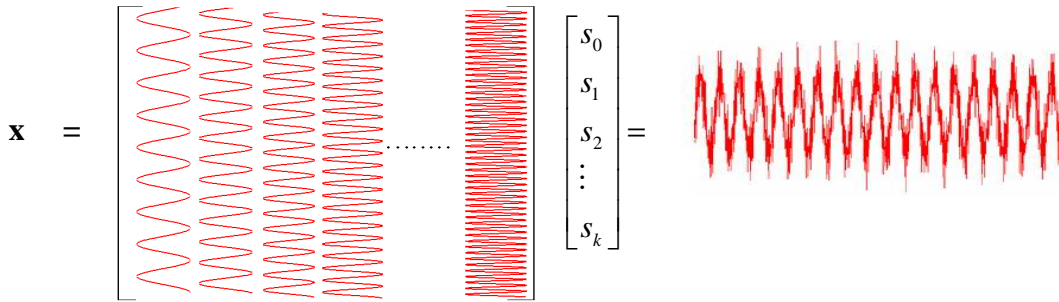
Se obtiene una matriz de  $n$  columnas, cada una de las cuales representa una función coseno o seno a cierta frecuencia. El diccionario se podría representar de manera gráfica de la siguiente manera:



**Fig7.** Representación ilustrativa de un diccionario de Fourier. Cada una de las funciones sinusoidales representa un átomo del diccionario.

Una señal k-sparse en algún dominio  $\Psi$ , puede ser definida a partir de una combinación lineal de k átomos provenientes del diccionario  $\Psi$ :

$$(12) \quad \mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^k \Psi_{ni} s_{ni} = \Psi \mathbf{s}$$



**Fig8.** Ejemplo de la definición de una señal sparse en el dominio de la frecuencia a partir de los átomos de un diccionario de Fourier,  $\mathbf{x} = \Psi \mathbf{s}$ .

### 2.2.4.3 Diccionario holográfico

La definición de diccionario holográfico  $\mathbf{V}$  es simplemente la proyección de cada función básica contenida en el diccionario  $\Psi$  sobre la matriz de proyecciones aleatorias  $\Phi$ :

$$(13) \quad \mathbf{V} = \Psi \Phi = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_m]$$

dónde cada componente  $\mathbf{V}_i$  es un vector columna.

## 2.3 Reconstrucción de una señal utilizando la teoría del CS

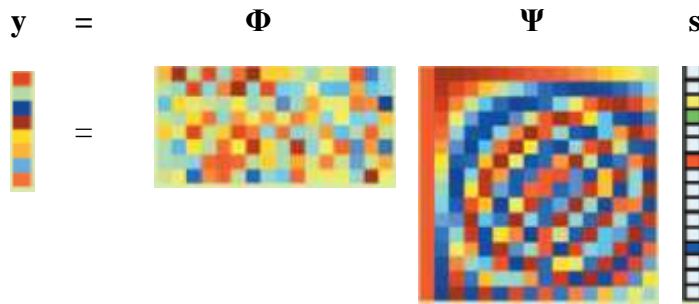
En el artículo *Compressive Sensing* [1] de *Richard Baraniuk* encontramos la siguiente definición:

*Definición ([1]):* Sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  una señal que es k-sparse, en algún dominio o diccionario  $\Psi$  (tiempo, frecuencia...), ésta puede ser reconstruida con alta probabilidad, usando sólo un reducido conjunto de proyecciones y sobre una base aleatoria  $\Phi \in \mathbb{R}^m$  formada por una colección de vectores  $\{\phi_j\}_{j=1}^m$ , siempre y cuando la matriz de proyecciones  $\Phi$  sea incoherente con el diccionario  $\Psi$ .

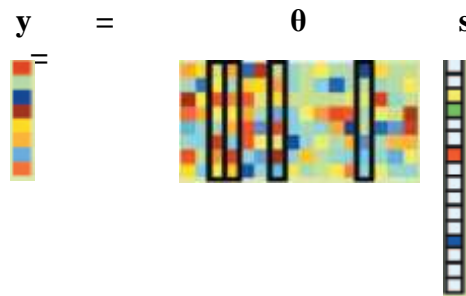
$$(14) \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \mathbf{s} = \theta \mathbf{s}$$

donde  $\theta = \Phi \Psi$  es una matriz  $m \times n$ .





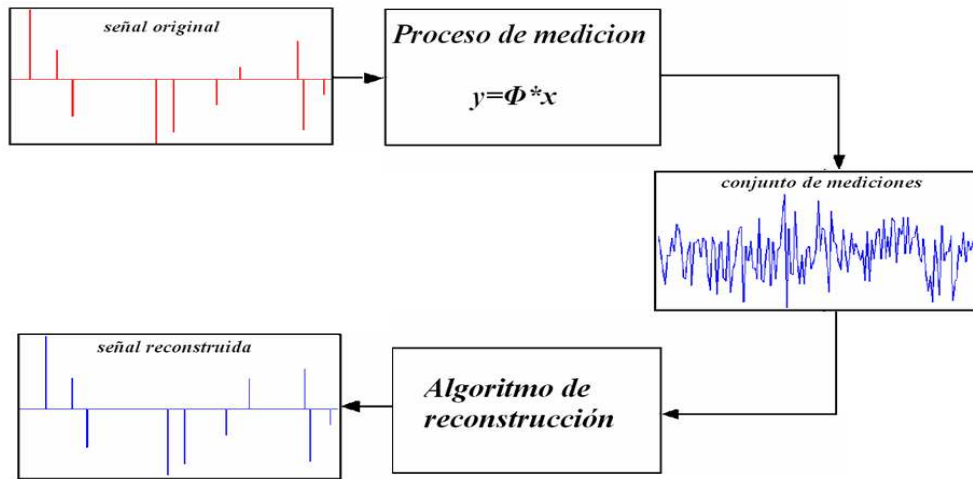
**Fig9.** CS con matriz de mediciones Gaussiana aleatoria  $\Phi$  y matriz transformada de coseno discreta (DCT)  $\Psi$ . El vector de coeficientes  $s$  es sparse con  $k=4$



**Fig10.** Proceso realizado con  $\theta = \Psi \Phi$ . Existen 4 columnas que se corresponden con los  $s_i$  coeficientes distintos de cero, el vector de medidas  $y$  es una combinación lineal de dichas columnas.

Podemos dividir el problema en dos bloques:

- 1) Proceso de medición: El proceso de medición consiste en proyectar la señal original sobre una matriz o base  $\Phi$  cuyos elementos son generados de forma aleatoria, estos elementos pueden provenir de una distribución Gaussiana, o de una distribución de Bernouilli, más adelante se estudiarán estas distribuciones. Por lo tanto el problema se reduce a diseñar una matriz  $\Phi$  de forma que  $y = \Phi x$  donde  $\Phi$  es una matriz de dimensión  $m \times n$  e  $y$  es un vector de dimensión  $m \times 1$ , teniendo en cuenta  $m \ll n$ . Esta matriz debe garantizar que la información importante de una señal  $k$ -sparse no se vea dañada por la reducción de dimensión de  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $y \in \mathbb{R}^m$ .
- 2) Proceso de reconstrucción: Consiste en resolver el siguiente problema de optimización:  $\min \|s\|_1$  sujeto a  $y = \theta s$ , pudiéndose usar una serie de algoritmos, entre los cuales se encuentran: el Matching Pursuit (MP) y el Orthogonal Matching Pursuit (OMP), para resolver este problema de minimización.



**Fig11.** Esquema del funcionamiento de la teoría del Compressive Sensing, en el que se muestra la señal original, el proceso de medición  $y = \Phi x$  y el conjunto de mediciones a partir de cual se ejecuta el algoritmo de reconstrucción.

### 2.3.1 Submuestreo y recuperación de la señal sparse

La teoría del CS establece que para la reconstrucción de la señal original se debe encontrar el conjunto de átomos del diccionario holográfico que más contribuyen a la formación del conjunto de mediciones. Esto se puede lograr al resolver el siguiente problema de optimización:

$$(15) \quad \min \|s\|_0 \quad \text{sujeto a} \quad y = Vs$$

Donde  $\|\cdot\|_0$  representa la norma  $\ell_0$  y  $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$  representa el diccionario holográfico.

Resolver este problema de optimización es bastante difícil, ya que no se puede garantizar que la solución al problema sea única. Para verificar que esta solución sea única, se tiene que barrer todos los subconjuntos que puedan generar subsistemas  $y = Vs$ , y luego verificar si este sistema tiene solución. El costo de realizar esta búsqueda exhaustiva crece exponencialmente a medida que  $n$  crece. Debido a la dificultad al resolver este problema surge la necesidad de buscar algún tipo de aproximación, que sea lo bastante parecida a la solución del problema anteriormente planteado.

- **Norma  $\ell_2$** , se define la norma  $\ell_p$  del vector  $s$  como:

$$(16) \quad \left( \|s\|_p \right) = \sum_{i=1}^N |s_i|^p$$

Para resolver problemas de este tipo, se busca el vector de menor norma  $\ell_2$  que resuelva:

$$(17) \quad \tilde{s} = \mathbf{argmin} \|s'\|_2 \quad \text{tal que} \quad \Theta s' = y$$

Esta optimización tiene como solución:

$$(18) \quad \tilde{s} = \theta^T (\theta \theta^T)^{-1} \mathbf{y}$$

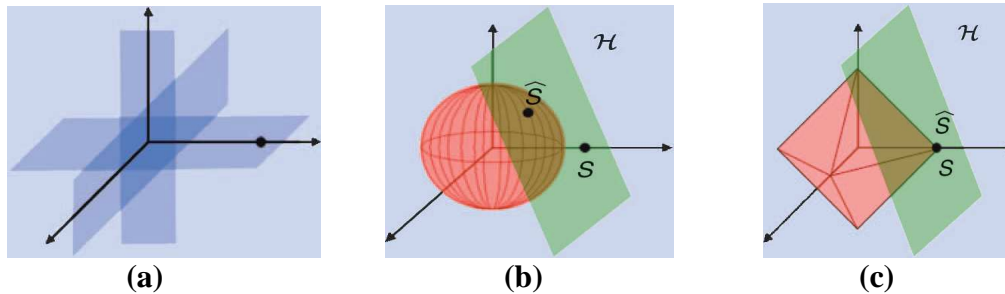
Desafortunadamente, con la norma  $\ell_2$  no encontramos una solución k-sparse, devolviendo en cambio un vector no sparse, es decir, con muchos elementos distintos de cero.

- **Norma  $\ell_1$** , la optimización basada en la norma  $\ell_1$

$$(19) \quad \langle \mathbf{s} \rangle = \mathbf{argmin} \|\mathbf{s}'\|_1 \quad \text{tal que} \quad \theta \mathbf{s}' = \mathbf{y}$$

Podemos recuperar exactamente señales k-sparse siempre que la solución al problema de minimización de la norma  $\ell_0$  sea lo suficientemente sparse, la solución a la norma  $\ell_1$  será única e igual a la solución que se obtiene al resolver el problema de minimización de la norma  $\ell_0$ .

En el artículo de *Richard Baraniuk [1]*, encontramos un estudio de la geometría del problema del Compressive Sensing que nos ayuda a visualizar porqué la norma  $\ell_2$  falla en la reconstrucción de la señal sparse y sin embargo con la norma  $\ell_1$  sí podemos identificar la solución correcta.



**Fig 12.** (a) Los subespacios que contiene dos vectores dispersos en  $\mathbb{R}^3$  se encuentran cerca de los ejes de coordenadas. (b) Visualización de la minimización  $\ell_2$  que obtiene el punto no sparse, intersección entre la bola  $\ell_2$  (hiperesfera en rojo) y el espacio nulo de la matriz de mediciones (en verde). (c) Solución de la norma  $\ell_1$  que encuentra el punto sparse con alta probabilidad.

El conjunto de todos los vectores k-sparse en  $\mathbb{R}^n$  es un espacio altamente no lineal constituido por todos los hiperplanos k-dimensionales que están alineados con los ejes de coordenadas como se muestra en la figura 12 (a). La traducción del espacio nulo  $H = N(\theta) + \mathbf{s}$  está orientado en un ángulo al azar debido a la aleatoriedad de la matriz como se muestra en figura 12 (b). La solución  $\tilde{s}$  de la norma  $\ell_2$  es el punto de H más cercano al origen. Debido a la orientación aleatoria de H, el punto más cercano estará probablemente lejos de los ejes de coordenadas y por lo tanto nunca será una solución

sparse ni tan siquiera cercana a la solución correcta  $s$ . De lo contrario con la norma  $\ell_1$  mostrada en la figura 12 (c) existen puntos alineados con los ejes de coordenadas, por lo tanto el primer contacto del plano con el espacio nulo  $H$  será un punto cercano a los ejes de coordenadas que es precisamente la posición del vector sparse  $s$ .

### 2.3.1.1 Teorema de muestreo no lineal

Tras la reflexión realizada en el apartado anterior, se decide recuperar la información a partir de la norma  $\ell_1$ . *Candès, Romberg y Tao* [4] demuestran que casi siempre es posible recuperar la señal  $x$  exactamente resolviendo el siguiente problema de optimización no lineal:

$$(20) \quad \min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{x}\|_{\ell_1} \quad \text{sujeto a} \quad \Phi\tilde{x} = y$$

$$\text{dónde } \|\tilde{x}\|_{\ell_1} := \sum_{i=1}^n |\tilde{x}_i|.$$

En el artículo *Basis Pursuit de S.S. Chen* [14] se desarrolla la relación del problema de optimización anterior con la programación lineal, la cual se define, de forma estándar, en términos de la variable  $x \in \mathbb{R}^m$  como:

$$(21) \quad \min c^T x \quad \text{sujeto a} \quad Ax = b \quad \text{siendo } x \geq 0$$

dónde  $c^T x$  es la función objetivo,  $Ax = b$  es la colección de restricciones y  $x \geq 0$  es la constante positiva.

Aunque la solución al problema (20) requiere una optimización no lineal, puede ser reformulado como un programa lineal en su forma estándar (21). Escogemos dos vectores  $u$  y  $v$  de dimensión  $p$ , y consideramos el problema de optimización anterior definido en términos de  $u$  y  $v$ :

$$(22) \quad \min l^T u + l^T v \quad \text{sujeto a} \quad \Phi(u - v) = s, u, v \geq 0$$

Esto es un problema de optimización en  $\mathbb{R}^{2p}$ ; si definimos  $a \equiv u - v$ , cualquier solución a este problema es una solución de (20). En efecto  $\Phi a = \Phi(u - v)$ , mientras que  $l^T u + l^T v = \sum_i |\alpha_i|$ . Por lo tanto, la solución de (20) se puede obtener resolviendo un programa lineal equivalente.

Es conocido que en un problema de programación lineal con una matriz de dimensión  $n \times m$  existe una solución que tiene a lo sumo  $n$  entradas distintas de cero. En el caso genérico existen exactamente  $n$  entradas distintas de cero, estas entradas están asociadas con  $n$  columnas de la matriz  $A$  y estas columnas forman una base en  $\mathbb{R}^n$ . Estas columnas que forman la base no son conocidas a priori sino que dependen de los datos del problema, en este caso de  $b$ . Es más, resolver el problema LP es igual que encontrar esta base, una vez que la base está identificada, la solución viene dictada únicamente

por la base. Si la matriz  $B$  de dimensión  $n \times n$  está formada por las  $n$  columnas de  $A$  seleccionadas anteriormente, con la ecuación  $Ax = b$  obtendremos los coeficientes distintos de cero a partir de  $B^{-1}b$ . De forma que podemos representar la señal original como:

$$(23) \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n s_i \Psi_i$$

donde  $\Psi_i$  son las  $n$  columnas que conforman el diccionario y  $s_i$  representa la contribución del átomo  $\Psi_i$  a la definición de la señal  $x$ ,  $s_i = \langle x, \Psi_i \rangle$ .

*Teorema 1 [2]:* Tomar  $x \in \mathbb{R}^n$  y suponer que la secuencia de componentes  $s$  de  $x$  expresada en la base  $\Psi$  es  $k$ -sparse. Seleccionamos  $m$  mediciones en el dominio  $\Phi$  de forma uniforme aleatoriamente. Luego si

$$(24) \quad m \geq C \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot k \cdot \log n$$

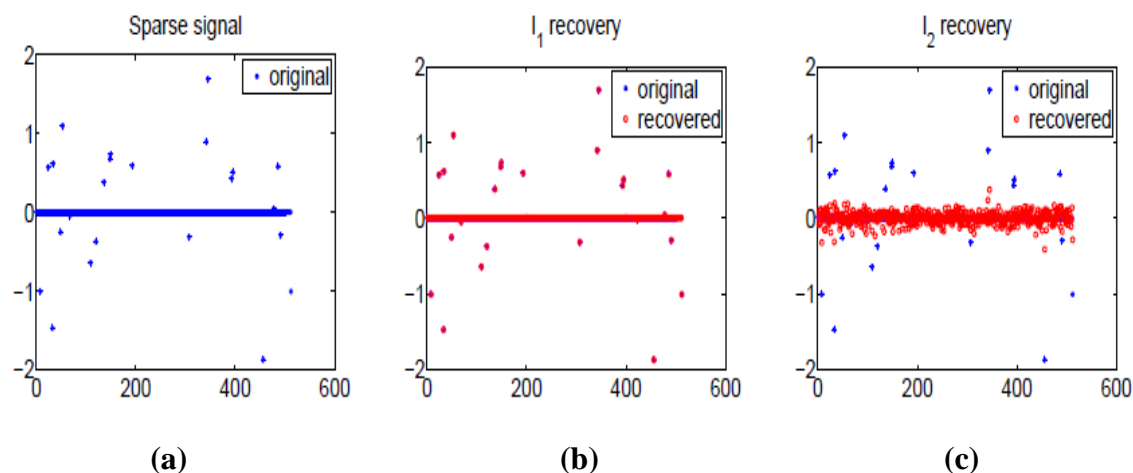
para alguna constante positiva  $C$ , la solución de (21) es exacta con alta probabilidad. Se demuestra que la probabilidad de éxito supera el valor de  $1-\delta$  si

$$(25) \quad m \geq C \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot k \cdot \log(n/\delta)$$

Llegados a este punto encontramos una reflexión realizada por *Candès y Wakin [2]*:

- El papel de la coherencia es imprescindible, cuanto menor sea la coherencia menos muestras necesitamos.
- No aparece una pérdida de información considerable a pesar de usar simplemente  $m$  mediciones siendo  $m$  mucho menor que el número de muestras de la señal original. Si  $\mu(\Phi, \Psi)$  es aproximadamente 1 entonces el número de muestras necesarias es del orden de  $k \cdot \log(n)$ .
- La señal  $x$  puede ser recuperada a partir de las  $m$  mediciones (sin que la información importante de la señal  $k$ -sparse se vea dañada por la reducción de dimensión de  $x \in \mathbb{R}^n$  a  $y \in \mathbb{R}^m$ ) sin necesidad de conocer el número de elementos distintos de cero, su posición o su valor.

En el artículo de *Emmanuel Candès y Michael Wakin [2]*, podemos ver este ejemplo de reconstrucción. En la figura **10 a)** se representa la señal sparse original y **b)** su reconstrucción a partir de 60 coeficientes de Fourier empleando la norma  $\ell_1$ . **c)** Reconstrucción de mínima energía obtenida sustituyendo la norma  $\ell_1$  por  $\ell_2$ .  $\ell_1$  y  $\ell_2$  proporcionan respuestas muy diferentes, la solución  $\ell_2$  no proporciona una aproximación muy razonable de la señal original.



**Fig13.** Comparativa de reconstrucción entre norma  $\ell_1$  y  $\ell_2$ . **(a)** Señal sparse original. **(b)** Reconstrucción a partir de 60 coeficientes de Fourier empleando la norma  $\ell_1$ . **(c)** Reconstrucción de mínima energía obtenida sustituyendo la norma  $\ell_1$  por  $\ell_2$ .

## 2.4 Diseño de la matriz de medición $\Phi$

La matriz de medición  $\Phi$  debe permitir la reconstrucción de la señal  $x$  de longitud  $n$  a partir de las  $m \ll n$  muestras pertenecientes al vector de proyecciones  $y$ . En el artículo citado anteriormente de *Richard Baraniuk [1]*, si  $x$  es  $k$ -sparse y se conocen las posiciones de las  $k$  muestras distintas de cero, el problema se resuelve siempre que  $m \geq k$ . Una condición necesaria y suficiente para esta simplificación del problema es que para cualquier vector  $v$  que comparta las mismas  $k$  muestras distintas de cero que  $s$  y para algún  $\varepsilon > 0$

$$(26) \quad \mathbf{1} - \varepsilon \leq \frac{\|\Phi v\|_2}{\|v\|_2} \leq \mathbf{1} + \varepsilon$$

Es decir, la matriz  $\Phi$  debe conservar las longitudes de estos vectores  $k$ -sparse.

En general, la posición de las  $k$  muestras distintas de cero no es conocida. De todas formas, una condición suficiente para conseguir una solución estable es que la matriz  $\Phi$  satisfaga (26) para un vector  $k$ -sparse  $v$  arbitrario. Esta condición se refiere a la propiedad de isometría restringida (RIP). También se requiere que ningún elemento de la matriz  $\Phi$  pueda ser obtenido mediante una combinación lineal de elementos de la matriz  $\Psi$  y viceversa, lo que se corresponde con la propiedad de incoherencia.

### 2.4.1 Propiedad de Isometría Restringida

En esta sección introducimos una noción clave que ha resultado ser muy útil en el estudio de la robustez del Compressive Sensing, conocida como Propiedad de Isometría Restringida, RIP.

En el artículo de *Emmanuel J. Candès y Michael B. Wakin*, encontramos la siguiente definición. [6]:

*Definición ([6]):* Para cada número real  $k = 1, 2, \dots$  se define la constante isométrica  $\delta_k$  de una matriz  $\Phi$  como el número más pequeño tal que

$$(27) \quad (1 - \delta_k) \|x\|_{l_2}^2 \leq \|\Phi x\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_k) \|x\|_{l_2}^2$$

para todo vector  $x$   $k$ -sparse.

Diremos que una matriz  $\Phi$  cumple la Propiedad de Isometría Restringida de orden  $k$  si  $\delta_k$  no está demasiado cerca de 1.

Implicaciones de la Propiedad de Isometría Restringida:

- 1) Reconstrucción de la señal a partir de las proyecciones aleatorias.

Si la Propiedad de Isometría Restringida se cumple, entonces la reconstrucción obtenida de la resolución del problema:

$$(28) \quad \min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{x}\|_{l_1} \quad \text{sujeto a} \quad \Phi \tilde{x} = y$$

es exacta.

*Teorema 2 ([8]):* Suponemos que  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ . Entonces la solución  $x^*$  a (28) obedece

$$(29) \quad \|x^* - x\|_{l_2} \leq C_0 \cdot \|x - x_k\|_{l_1} / \sqrt{k} \quad \text{y} \quad \|x - x^*\|_{l_1} \leq C_0 \cdot \|x - x_k\|_{l_1}$$

para alguna constante  $C_0$ , donde  $x_k$  es el vector  $x$  con todas sus componentes puestas a cero excepto el conjunto de las  $k$  componentes mayores. Las conclusiones de este teorema son más fuertes que las del *Teorema 1* en el cual se expone que si  $x$  es  $k$ -sparse entonces  $x = x_k$  y por lo tanto la recuperación es exacta. Con este nuevo teorema, si  $x$  no es  $k$ -sparse (29) asegura que la calidad de la señal recuperada será tan buena como si se supieran de antemano las posiciones de los  $k$  elementos mayores. En otras palabras la reconstrucción es casi tan buena como la proporcionada por un oráculo que, con conocimiento pleno y perfecto sobre el objeto, pudiera extraer los  $k$  coeficientes más significantes.

Si somos capaces de encontrar una matriz  $\Phi$  que obedezca la hipótesis del teorema, podemos aplicarlo, y tendremos la garantía de recuperar exactamente todos los vectores  $k$ -sparse o de otro modo las  $k$  entradas mayores de todos los vectores, es decir, no existe probabilidad de fallo. Además puesto que la misma matriz  $\Phi$  funciona para todos los vectores de  $\mathbb{R}^n$ , a menudo nos referimos a ella como universal

2) Reconstrucción de la señal a partir de datos con ruido aditivo.

Consideramos el problema de recuperación de un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  a partir de  $y$  de la forma

$$(30) \quad y = \Phi x + z$$

siendo  $\Phi$  la matriz de mediciones y  $z$  un término de error estocástico o determinístico desconocido. Usamos la norma  $\ell_1$  para realizar la reconstrucción

$$(31) \quad \min \|\tilde{x}\|_{\ell_1} \quad \text{sujeto a} \quad \|\Phi\tilde{x} - y\|_{\ell_2} \leq \varepsilon$$

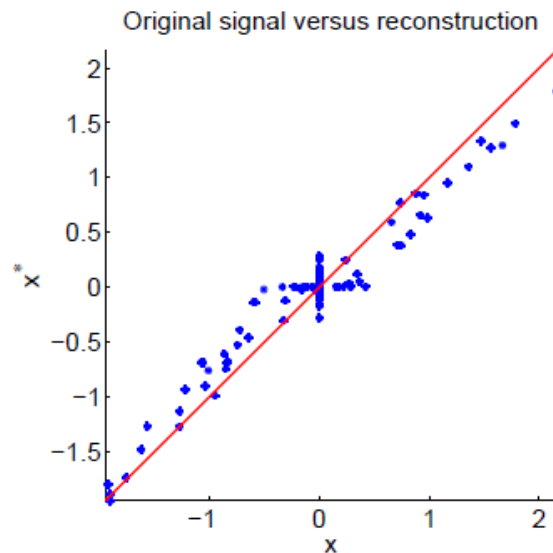
donde  $\varepsilon$  limita la cantidad de error en los datos.

*Teorema 3 [8]:* Suponemos que  $\delta_{2k} < \sqrt{2} - 1$ . Entonces la solución  $x^*$  a (27) obedece

$$(32) \quad \|x^* - x\|_{\ell_2} \leq C_0 \cdot \|x - x_k\|_{\ell_1} / \sqrt{k} + C_1 \cdot \varepsilon$$

para algunas constantes  $C_0$  y  $C_1$ .

El error de reconstrucción está limitado por la suma de dos términos. El primero es el error que se produciría si no existiera ruido. El segundo es simplemente proporcional al nivel de ruido. Además las constantes  $C_0$  y  $C_1$  suelen ser pequeñas, por ejemplo, para  $\delta_{2k} = 1/4$ ,  $C_0 \leq 5.5$  y  $C_1 \leq 6$ . En la figura 11 se muestra un ejemplo de reconstrucción con ruido.



**Fig14.** Señal  $x$  (eje horizontal) y su reconstrucción  $x^*$ (eje vertical) obtenida a partir de (28). En este ejemplo  $n = 512$  y  $m = 256$ , la señal es 64-sparse. Siguiendo el modelo (30), la matriz  $\Phi$  tiene i.i.d.  $N(0, 1/n)$  y  $z$  es un ruido blanco Gaussiano. El nivel de ruido está ajustado para que  $\|\Phi x\|_{\ell_2} / \|z\|_{\ell_2} = 5$ . Obtenemos que  $\|x^* - x\|_{\ell_2} \approx 1.3 \cdot \varepsilon$



## 2.4.2 Matrices admisibles

La matriz de mediciones  $\Phi \in \mathbb{R}^m$  para la recuperación de señales  $k$ -sparse, es una matriz  $n \times m$  con cuatro propiedades, *Tropp y Gilbert* [11]:

- 1) Independencia: las columnas de  $\Phi$  deben ser estadísticamente independientes. Las columnas de  $\Phi$  no necesitan tener la misma distribución, esta condición sólo requiere la independencia de las columnas, los elementos de una misma columna pueden ser correlacionados.

- 2) Normalización:

$$(33) \quad \mathbb{E} \|\phi_j\|_2^2 = 1 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, m$$

La normalización a la unidad se escoge para simplificar las pruebas, pero debería ser obvio que el problema de recuperación de la señal no depende de la escala de la matriz de medidas  $\Phi$ .

- 3) Correlación conjunta: siendo  $\{\mathbf{u}_t\}$  una secuencia de  $k$  vectores cuya norma  $\ell_2$  no excede de 1 y  $\phi$  una columna de  $\Phi$  independiente de dicha secuencia, entonces

$$(34) \quad P\{\max_t |\langle \phi, \mathbf{u}_t \rangle| \leq \epsilon\} \geq 1 - 2ke^{-c\epsilon^2 m}$$

- 4) Valor singular más pequeño: Para una submatriz de  $\Phi$ ,  $Z$  de dimensión  $n \times k$ , el  $k$  valor singular mayor  $\sigma_k(Z)$  cumple:

$$(35) \quad P\{\sigma_k(Z) \geq 0.5\} \geq 1 - e^{-cm}$$

En el artículo de *Candès* [5], encontramos una serie de matrices que cumplen las cuatro propiedades citadas anteriormente:

- Mediciones Gaussianas: las entradas de la matriz  $\Phi$ , de dimensión  $m \times n$ , se muestrean independientemente de una distribución normal con media cero y varianza  $1/m$ . Entonces si

$$(36) \quad k \leq C \cdot m / \log(n/m)$$

$k$  cumple la condición del Teorema 3 con probabilidad  $1 - O(e^{-\gamma n})$  para algún  $\gamma > 0$ .

- Mediciones Binarias: las entradas de la matriz  $\Phi$ , de dimensión  $m \times n$ , se muestrean independientemente de la distribución simétrica de Bernoulli  $P(\Phi_{mi} = \pm 1/\sqrt{m}) = 1/2$ . Entonces se comprueba que la condición del Teorema

3 se satisface con una probabilidad  $1 - O(e^{-\gamma m})$  para algún  $\gamma > 0$  siempre que  $k$  cumpla (29).

- Mediciones de Fourier: suponer ahora que  $\Phi$  es una matriz de Fourier obtenida de la selección de  $m$  filas uniformemente al azar como antes, y normalizamos las columnas para que tengan norma unidad. *Candès y Tao* [9] muestran que el Teorema 3 se cumple con alta probabilidad si

$$(37) \quad k \leq C \cdot m / (\log n)^6.$$

Recientemente *Rudelson y Vershynin* [10] mejoraron este resultado obteniendo

$$(38) \quad k \leq C \cdot m / (\log n)^4.$$

- Mediciones incoherentes: suponer ahora que  $\Phi$  se obtiene de la selección de  $m$  filas uniformemente al azar de una matriz ortonormal de dimensión  $n \times n$   $U$  y normalizamos las columnas para que tengan norma unidad. Podríamos pensar que  $U$  es la matriz  $\Phi\Psi^*$  que asigna los objetos de  $\Psi$  al dominio  $\Phi$ . Luego el Teorema 3 se cumple con alta probabilidad siempre que

$$(39) \quad k \leq C \cdot \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{m}{(\log n)^4}$$

donde  $\mu := \sqrt{n} \max_{i,j} |U_{i,j}|$  con  $U = \Phi\Psi^*$  :

$$(40) \quad \mu := \sqrt{n} \max_{i,j} |\langle \varphi_i, \psi_j \rangle|$$

que se refiere a la coherencia entre la matriz de mediciones  $\Phi$  y la base  $\Psi$ . Cuanto mayor sea la incoherencia entre el par  $(\Phi, \Psi)$  menor será el número de mediciones necesarias para la correcta reconstrucción de la señal original.

Vamos a emplear las propiedades 3) y 4) para comprobar que tanto la distribución Gaussiana como la de Bernouilli pueden emplearse para la obtención de la matriz de mediciones  $\Phi$ .

- 3) Correlación conjunta: siendo  $\{u_t\}$  una secuencia de vectores cuya norma  $\ell_2$  no excede de 1. De forma independiente escogemos un vector aleatorio  $z$  con i.i.d.  $N(0, n^{-1})$ . Entonces

$$(41) \quad P\{\max_t |\langle z, u_t \rangle| \leq \varepsilon\} \geq 1 - ke^{-\varepsilon^2 n/2}$$

*Demostración:* la probabilidad sólo decrece si la longitud de cada vector  $u_t$  incrementa. Por lo tanto, debemos asumir que  $\|u_t\|_2 = 1$  para cada  $t$ . Suponemos

que  $z$  es un vector aleatorio con i.i.d  $N(0, n^{-1})$ . Luego la variable aleatoria  $\langle z, u_t \rangle$  también tiene distribución  $N(0, n^{-1})$ .

- 4) Valor singular más pequeño: suponemos que  $Z$  es una matriz  $n \times k$  cuyas entradas son todas i.i.d  $N(0, n^{-1})$  o al menos i.i.d. uniforme en  $\{\pm 1/\sqrt{n}\}$ .

Entonces

$$(42) \quad 0.5 \|x\|_2 \leq \|Zx\|_2 \leq 1.5 \|x\|_2$$

con probabilidad:

$$(43) \quad 1 - 2 \cdot 24^k \cdot e^{-cn}$$

Concluimos que esta propiedad sirve para conjuntos de medidas Gaussianas y de Bernoulli siempre que  $n \geq Ck$ .

## 2.5 Conclusiones

Comprobamos que con la teoría de muestreo de Nyquist, a medida que el ancho de banda de la señal aumenta, también lo hace la frecuencia de muestreo, de forma que para ciertos tipos de señales la tarea de muestreo se hace casi imposible, aunque la señal se pudiese muestrear, la cantidad de muestras tomadas para su reconstrucción sería muy elevada.

Surge la necesidad de introducir nuevas teorías que sean capaces de resolver las deficiencias de la teoría clásica de muestreo como el Compressive Sensing que establece que una señal  $x$  poco densa puede ser reconstruida con alta probabilidad a partir de un conjunto de muestras y provenientes de su proyección aleatoria, siempre y cuando la señal cumpla con la condición de escasez o poca densidad en algún dominio que denominamos diccionario  $\Psi$  y que éste a su vez sea incoherente con la matriz de medición  $\Phi$ .

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s = \theta s$$

Esto se puede lograr al resolver el problema de optimización  $\min \|s\|_1$  sujeto a  $y = \Phi s$ . Resolver este problema de optimización es bastante difícil, ya que no se puede garantizar que la solución al problema sea única. Se ha comprobado durante el desarrollo de este apartado que  $\ell_1$  y  $\ell_2$  proporcionan respuestas muy diferentes a este problema, obteniendo que la solución  $\ell_2$  no proporciona una aproximación muy razonable de la señal original.

También se ha demostrado que si  $x$  es una señal  $k$ -sparse y seleccionamos  $m$  mediciones en el dominio  $\Phi$  uniformemente de forma aleatoria, la solución al problema de optimización será exacta con alta probabilidad si se cumple:

$$m \geq C \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot k \cdot \log n$$

La matriz de medición  $\Phi$  debe permitir la reconstrucción de la señal  $x$  de longitud  $n$  a partir de las  $m \ll n$  muestras pertenecientes al vector de proyecciones  $y$ . Se ha presentado una noción clave que ha resultado ser muy útil en el estudio de la robustez del Compressive Sensing, conocida como Propiedad de Isometría Restringida, RIP, así como una serie de propiedades que deben cumplir estas matrices, independencia y normalización de las columnas, correlación conjunta y valor singular más pequeño. Se han incluido en el capítulo una serie de matrices que cumplen las cuatro propiedades citadas anteriormente, mediciones Gaussianas, mediciones Binarias (o de Bernouilli), mediciones de Fourier y mediciones incoherentes.