1 Introducción

El Teorema de Shanon establece que una señal con ancho de banda limitado, puede ser reconstruida exactamente a partir de una serie de muestras provenientes de un proceso de muestreo, sólo si la frecuencia de muestreo es mayor que la frecuencia de Nyquist, o sea mayor que el doble de su ancho de banda. A medida que el ancho de banda de la señal aumenta, también lo hace la frecuencia de muestreo, de forma que para ciertos tipos de señales la tarea de muestreo se hace casi imposible. Surge la necesidad de introducir nuevas teorías que sean capaces de resolver las deficiencias de la teoría clásica de muestreo.

En el presente trabajo se muestra que la teoría del Compressive Sensing puede ser aplicada para la reconstrucción de señales, como así indican los resultados obtenidos.

Compressive Sensing es una teoría reciente propuesta por Candès y Donoho (2006) con un gran potencial en la reconstrucción de señales poco densas (sparse), esta teoría establece que una señal sparse puede ser reconstruida con alta probabilidad a partir de un reducido conjunto de muestras, mucho menor que la señal original e incluso menor que el requerido por el Teorema de Shanon, si se cumple con ciertas condiciones. Esto implica una considerable reducción de los datos necesarios para reconstruir la señal; al necesitar menos datos, se reduce la frecuencia de muestreo, evitando el problema que presenta el muestrear señales de altas frecuencias.

La principal desventaja que presenta la teoría del Compressive Sensig respecto a la teoría clásica de muestreo, es que ésta no es una teoría determinista sino probabilística, de forma que no se puede asegurar que la reconstrucción de la señal sea 100% exitosa.

1.1 Motivaciones y objetivos

El teorema de Shanon/Nyquist especifica que para impedir la pérdida de información al capturar una señal, la tasa de muestreo debe ser al menos el doble de su ancho de banda. En muchas aplicaciones, incluidas imagen digital y video cámara, la frecuencia de Nyquist es muy elevada teniendo que tomar por ello demasiadas muestras de la señal lo que conlleva a la necesidad de comprimir la información antes de almacenarla o transmitirla. En otras aplicaciones como sistemas de imagen (escáneres médicos, radares…) y convertidores analógico-digitales, aumentar el número de muestras conlleva un aumento del costo.

Es por ello, que surge una nueva técnica denominada Muestreo Compresivo(Compressive Sensing) que reduce considerablemente el número de muestras necesarias para la reconstrucción de una señal, lo que implica:

- menor frecuencia de muestreo
- menor cantidad de datos
- menor uso de los recursos de almacenaje
- menor requerimiento de velocidad de los convertidores analógico-digitales
- menor uso de ancho de banda para la transmisión de los datos, es decir, menor tiempo requerido para la transmisión de los datos

Como objetivo principal en este trabajo se tiene el poder aplicar la teoría del Compressive Sensing para la reconstrucción de una variedad de señales a partir de sus muestras. Como se verá en las siguientes secciones, se logró implementar una serie de algoritmos iterativos de reconstrucción, Matching Pursuit y Orthogonal Matching Pursuit. La idea de estos algoritmos es la reconstrucción de la señal original a partir de un conjunto reducido de muestras aleatorias, sin embargo ellos difieren entre sí en algunos pasos que hacen que uno tenga mejor rendimiento que el otro o que su complejidad sea menor. Utilizando cada uno de estos algoritmos ha sido posible la reconstrucción de señales en el dominio del tiempo y de la frecuencia con niveles de error bastante bajos.

Como objetivo específico se realiza una comparación detallada del rendimiento de cada algoritmo, con la finalidad de determinar qué algoritmo es el más adecuado para cada tipo de aplicación. Para esto se comparan varios factores que influyen en el tiempo de reconstrucción y en el costo de cálculo que implica reconstruir una señal dada con cada uno de los algoritmos.

1.2 Aplicaciones

1.2.1 Estimación del canal en comunicaciones

Sabiendo que los canales con respuesta impulsiva sparse aparecen en un gran número de aplicaciones en comunicaciones, aprovechamos esta escasez del canal para obtener un estimado del mismo usando los algoritmos estudiados. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de un canal sparse de longitud n = 119 y nivel de escasez k = 5, es decir, sólo 5 de sus n muestras son distintas de cero.

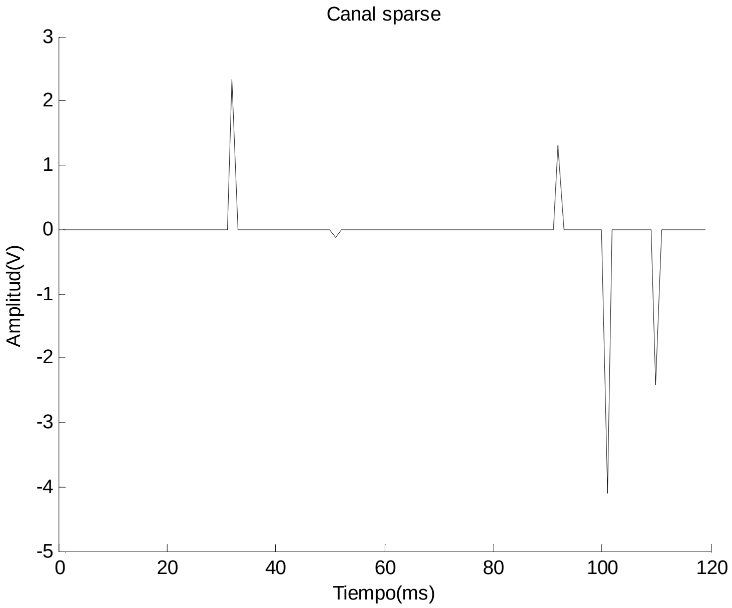


Fig1. Ejemplo de canal sparse de longitud m = 119 con sólo k = 5 muestras distintas de cero.

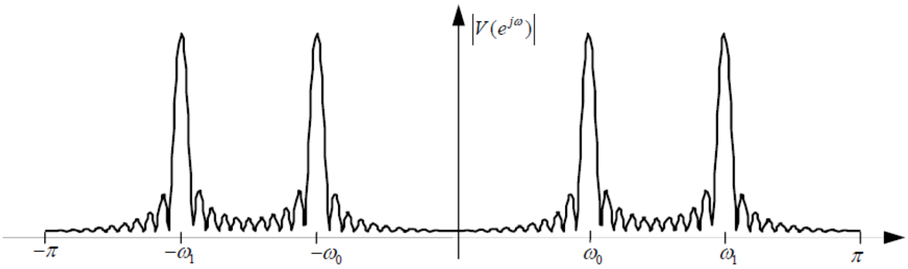
En primer lugar, se propondrá explotar la escasez natural del canal mediante el uso del algoritmo MP para obtener una estimación precisa del canal. Esta estimación obtenida a partir de MP es inherentemente sparse a diferencia de la estimación de mínimos cuadrados (LS) del canal donde cada uno de los valores de los pulsos serán generalmente distintos de cero.

En el algoritmo MP, como cada iteración de optimización se realiza sobre todos los vectores del diccionario, es posible reseleccionar un vector seleccionado en una iteración anterior. Este hecho disminuye la velocidad de convergencia hacia la solución sparse. Por eso, se propondrá el uso del algoritmo OMP para la estimación del canal. En OMP el problema de reselección se elimina ya que en cada iteración vamos almacenando el vector seleccionado, gracias a esto, OMP obtiene una velocidad de convergencia hacia la solución sparse mucho mayor.

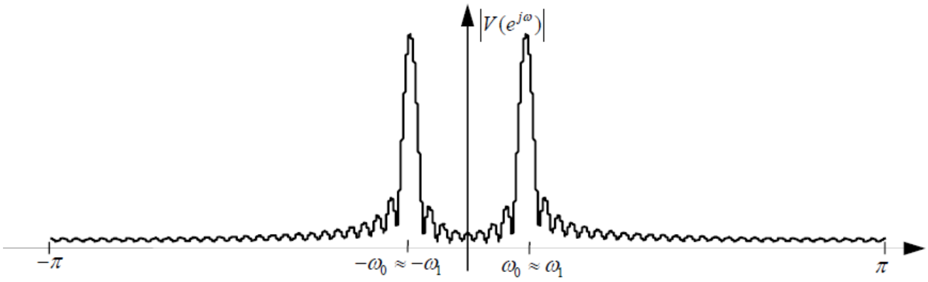
1.2.2 Detección de sinusoides en frecuencia

Se realizará una comparación entre el análisis frecuencial de señales basado en la DFT (Transformada Discreta de Fourier) y el análisis frecuencial basado en la teoría del Compressive Sensing, obteniendo el error producido en la reconstrucción de una señal sparse en el dominio de la frecuencia.

Vemos a continuación qué ocurre con la DFT para una $x(n)$ sinusoidal formada por la suma de dos cosenos:



(a)



(b)

Fig2. DTFT de una señal suma de cosenos $x(n) = A_0 \cos(\omega_0 n + \theta_0) + A_1 \cos(\omega_1 n + \theta_1)$. **(a)** Frecuencias ω_0 y ω_1 bien separadas. **(b)** Frecuencias ω_0 y ω_1 aproximadamente iguales.

Aunque siempre se van a solapar los espectros de los cosenos, está claro que en la figura 2(a) son perfectamente distinguibles. Sin embargo, en la figura 2(b), vemos que llega un momento en que los cosenos ya no se pueden distinguir. Decimos que la resolución espectral ya no es suficiente.

Una posible solución a este problema, sería la aplicación de los algoritmos estudiados, MP y OMP a la reconstrucción de señales sparse en el dominio de la frecuencia.

Tanto MP como OMP son algoritmos iterativos que tratan de encontrar el átomo del diccionario que aporta mayor contribución a la definición de la señal proyectada. En este caso encontrar esos átomos del diccionario, conlleva encontrar las frecuencias que están presentes en nuestra señal suma de cosenos. Tras encontrar el átomo del diccionario que aporta mayor contribución a la definición de la señal proyectada, estos algoritmos encuentran el estimado de la contribución de dicho átomo a la conformación de la señal y remueven dicha contribución que este aporta a la estructura del conjunto de mediciones de la señal, definiendo así un residuo. Se procede iterativamente hasta que el criterio de parada se cumpla.

1.2.3 Compressive Imaging

Se trata de aplicar la teoría del Compressive Sensing a la reconstrucción de imágenes, presentando los algoritmos y el soporte hardware para una nueva teoría denominada Compressive Imaging.

La proposición desarrollada por Wakin y Baraniuk, entre otros [20], está basada en una nueva cámara digital de video e imagen que directamente adquiere proyecciones aleatorias de la señal sin recolectar primero los píxeles. La arquitectura de esta cámara emplea una matriz de micro espejos digitales para realizar cálculos ópticos de las proyecciones lineales de una imagen en pseudo-patrones binarios. Sus características incluyen la capacidad de obtener una imagen con un número de mediciones menor al número de pixeles que forman la imagen, esto puede reducir de forma significante el cálculo necesario para la adquisición/codificación de video.

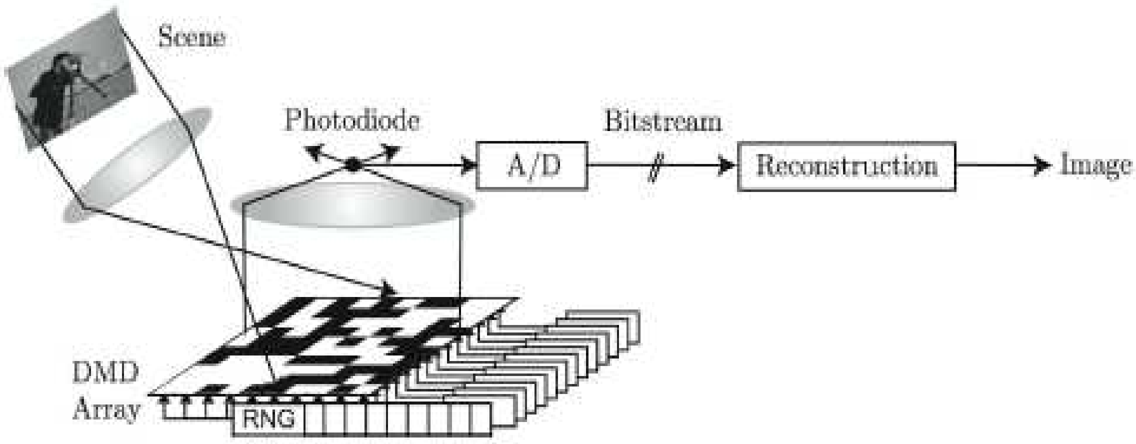


Fig3. Diagrama de bloques de Compressive Imaging (CI). El campo luminoso incidente (que corresponde a la imagen deseada x) se refleja en un dispositivo digital de micro espejos que forman una matriz (Digital Micromirror Device ,DMD). La orientación de estos espejos está modulada por el patrón pseudo aleatorio ϕ_m suministrado por el generador de números aleatorios (Random Number Generator, RNG). Cada espejo produce un voltaje en el fotodiodo que se corresponde con la proyección y(m).

La cámara tiene muchas características atractivas, como la simplicidad, universalidad, robustez y escalabilidad, que le permitirá tener efecto sobre una variedad de aplicaciones diferentes. Otra característica interesante y potencialmente útil de este sistema es que se descarga el proceso de recolección de datos centrándose en la reconstrucción. No sólo se disminuye la complejidad y el consumo de electricidad del dispositivo, sino que también se permitirán nuevos esquemas de medidas.

1.3 Estructura del proyecto

Con el fin de desarrollar los objetivos de este proyecto, tanto generales como específicos, la organización de este trabajo en capítulos se desarrolla de la siguiente forma:

Capítulo 2: Introducción a la teoría del Compressive Sensing.

En este capítulo se tratarán los fundamentos teóricos que sustentan la teoría del CS, cuales son las condiciones que se deben cumplir para que esta pueda ser aplicada y cómo se reconstruye una señal a partir del conjunto de mediciones. Se describirán las ventajas que presenta la teoría de Compressed Sensing sobre la teoría clásica de muestreo.

Capítulo 3: Algoritmos iterativos de reconstrucción.

En este capítulo se mostrarán los algoritmos de reconstrucción que se implementaron para la reconstrucción de señales utilizando la teoría de Compressed Sensing, estos son: Matching Pursuit y Orthogonal Matching Pursuit, también se mencionarán las ventajas y las desventajas que cada uno de ellos presenta.

Capítulo 4: Simulaciones

En este capítulo se hará un estudio comparativo entre los algoritmos de reconstrucción presentados en el capítulo 3. Para este estudio comparativo se tomarán en cuenta los siguientes criterios: número de proyecciones, número de iteraciones y robustez al ruido, con la finalidad de dar a conocer cuál de estos es el más adecuado para cada tipo de aplicación.

Capítulo 5: Aplicaciones

En este capítulo se presentan algunas de las aplicaciones de la teoría del Compressive Sensing. En primer lugar, se estudiará la estimación de un canal de comunicaciones sparse empleando tanto el algoritmo MP como el OMP. A continuación, se utilizará la teoría del CS para la detección de sinusoides, se reconstruirá una señal suma de varias sinusoides a distintas frecuencias usando ambos algoritmos. Por último, se trata de aplicar la teoría del Compressive Sensing a la reconstrucción de imágenes.