6 Conclusiones

Con la teoría de muestreo de Nyquist, a medida que el ancho de banda de la señal aumenta, también lo hace la frecuencia de muestreo, de forma que para ciertos tipos de señales la tarea de muestreo se hace casi imposible.

En este trabajo se estudia la teoría del Muestreo Compresivo (Compressed Sensing) como una nueva herramienta para el procesamiento de señales poco densas en algún dominio, que establece que una señal $x(t)$ (representada por el vector x) poco densa puede ser reconstruida con alta probabilidad a partir de un conjunto de muestras y provenientes de su proyección aleatoria, siempre y cuando la señal cumpla con la condición de escasez o poca densidad en algún dominio que denominamos diccionario Ψ y que éste a su vez sea incoherente con la matriz de medición Φ. Siendo x una señal sparse puede expresarse como combinación lineal de la matriz base Ψ gracias a sus coeficientes sparse s. Para recuperar la señal x, se proyectan estos coeficientes sobre la matriz de mediciones obteniendo así el vector de proyecciones aleatorias y, como vemos en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{y} = \Phi\,\mathbf{x} = \Phi\,\Psi\,\mathbf{s}$$

Esto se puede lograr al resolver el problema de optimización $\min \| s \|_1$ sujeto a $y = \Phi s$. Resolver este problema de optimización es bástate difícil, ya que no se puede garantizar que la solución al problema sea única. Se ha comprobado durante el desarrollo de este apartado que las soluciones a las normas ℓ_1 y ℓ_2 proporcionan respuestas muy diferentes a este problema, obteniendo que la solución asociada a la norma ℓ_2 no proporciona una aproximación muy razonable de la señal original.

También se ha demostrado que si x es una señal k-sparse y seleccionamos m mediciones en el dominio Φ uniformemente de forma aleatoria, la solución al problema de optimización será exacta con alta probabilidad si se cumple:

$$m \geq C \cdot \mu^2 \left(\Phi, \Psi\right) \cdot k \cdot \log n$$

La matriz de medición Φ debe permitir la reconstrucción de la señal x de longitud n a partir de las m < n muestras pertenecientes al vector de proyecciones y. Se ha presentado una noción clave que ha resultado ser muy útil en el estudio de la robustez del Compressive Sensing, conocida como Propiedad de Isometría Restringida, RIP, asi como una serie de propiedades que deben cumplir estas matrices, independencia y normalización de las columnas, correlación conjunta y valor singular más pequeño. Se han incluido en el capítulo una serie de matrices que cumplen las cuatro propiedades citadas anteriormente, mediciones Gaussianas, mediciones Binarias (o de Bernouilli), mediciones de Fourier y mediciones incoherentes.

Hemos visto que la señal original x es la única solución al problema de minimización $\min \|s\|_1$ sujeto a $y = \Phi s$. Resolver este problema requiere de elevados recursos de cálculo, lo cual lo hace poco adecuado para el uso en aplicaciones en tiempo real, generando la necesidad de encontrar métodos que puedan resolver este problema de forma más eficiente.
El algoritmo MP es un algoritmo iterativo que trata de encontrar el átomo del diccionario holográfico que aporta mayor contribución a la definición de la señal proyectada, encuentra el estimado de la contribución de dicho átomo a la conformación de la señal y remueve dicha contribución que este aporta a la estructura del conjunto de mediciones de la señal, definiendo así un residuo. Se procede iterativamente hasta que el criterio de parada se cumpla. Debido al gran número de iteraciones y mediciones necesarias para reconstruir una señal utilizando MP, surge la necesidad de desarrollar otro algoritmo iterativo que pueda mejorar estas desventajas.

La idea del OMP es básicamente la misma del MP, la principal diferencia es la introducción de una nueva matriz de medición y hallar la solución de un problema de mínimos cuadrados, a partir de la cual se hallará el estimado para la señal.

El problema principal del algoritmo MP es que se podría escoger un átomo que anteriormente ya había sido seleccionado, si esto sucede, la contribución que hace este átomo podría no ser muy significativa, en consecuencia el número de iteraciones crece si esto ocurre. El algoritmo OMP elimina este problema de reselección de columnas, aumentando así la velocidad de convergencia hacia la solución del problema.

En este proyecto se ha realizado un estudio comparativo del rendimiento de cada uno de los algoritmos de reconstrucción en base a los siguientes criterios: error de reconstrucción, número de proyecciones y robustez al ruido. A partir de dicho estudio se han obtenido las conclusiones que se describen a continuación:

Error de reconstrucción: se ha implementado la reconstrucción de una señal sparse en el dominio del tiempo en ausencia de ruido empleando el algoritmo Matching Pursuit observando que la reconstrucción se puede considerar exitosa con una diferencia entre la señal original y la reconstruida en el orden de 10^{-8}. También se ha realizado la reconstrucción de la misma señal con el algoritmo Orthogonal Matching Pursuit, comprobando que la reconstrucción se puede considerar exitosa con una diferencia entre la señal original y la reconstruida en el orden de 10^{-15}. Vemos que el error obtenido mediante el OMP es casi 10 órdenes menor que el obtenido con el algoritmo MP. No obstante ambos errores son bastante pequeños con lo que se demuestra la eficacia de ambos algoritmos. En la siguiente tabla se muestran los errores cometidos en la reconstrucción de una señal sparse en el dominio del tiempo por ambos algoritmos:

Algoritmo de reconstrucción	Error
MP	$1,5242x10^{-14}$
OMP	$1,1242x10^{-28}$

Tabla 9. Error cuadrático medio obtenido en la reconstrucción de una señal sparse en el dominio del tiempo en ausencia de ruido empleando los algoritmos MP y OMP.

A continuación, se han generado las curvas de error cuadrático medio y de probabilidad de reconstrucción, en las que se puede observar que a medida que se incrementa el número de mediciones disminuye el error cuadrático medio y la probabilidad de reconstrucción tiende a 1. También comprobamos que el número de mediciones necesarias para una reconstrucción exitosa es menor empleando el algoritmo Orthogonal Matching Pursuit, concluyendo que el algoritmo OMP converge a la solución de forma más rápida.

Número de proyecciones: se logró reconstruir señales utilizando sólo un pequeño conjunto de proyecciones de la señal. A medida que el nivel de escasez aumenta el número de proyecciones necesarias para la reconstrucción también lo hace, aun así el número de muestras necesarias para la reconstrucción es bastante reducido. En algunos casos sólo con el 20% de las muestras se logra reconstruir la señal con una probabilidad de 1, lo que se traduce en un gran ahorro de las capacidades de almacenaje, ancho de banda para la transmisión de datos, velocidades de los convertidores A/D, etc. En la tabla siguiente se muestran el número de proyecciones necesarias para cada algoritmo para que la probabilidad de reconstrucción sea igual a 1.

Escasez (k)	5	10	20	40
Proyecciones MP	75	115	185	290
Proyecciones OMP	47	70	120	210

Tabla 10. Número de mediciones necesarias para cada algoritmo para alcanzar una probabilidad de reconstrucción igual a 1. La señal reconstruida es una señal sparse en el dominio del tiempo de longitud n = 256 y nivel de escasez k.

Robustez al ruido: al tratar de reconstruir señales con ruido utilizando la teoría del CS no se obtuvo ningún resultado innovador, sino que se obtuvo la tendencia esperada: a medida que la potencia del ruido baja (es decir, aumenta la relación señal a ruido) también lo hace el error de reconstrucción, lo que implica que para señales con altos niveles de ruido no se logra un bajo error de reconstrucción. Por lo tanto, si se desea reconstruir señales contaminadas con un ruido cuya potencia es similar a la potencia de la señal es recomendable utilizar alguna otra técnica de reconstrucción que sea más robusta ante estas circunstancias.

En cuanto a las aplicaciones de la teoría del CS desarrolladas en este proyecto:

- Identificación del canal en comunicaciones: encontramos canales sparse en muchas aplicaciones para las comunicaciones. Explotando esta escasez, el estimado de un canal se puede obtener mediante el algoritmo Matching Pursuit. Se ha demostrado que esta estimación obtenida es inherentemente sparse, a diferencia de la estimación de mínimos cuadrados (LS) del canal, donde cada uno de los valores de los pulsos serán generalmente distintos de cero.

  En el algoritmo MP como la optimización de cada iteración se realiza sobre todos los átomos del diccionario, es posible reseleccionar un átomo previamente seleccionado, disminuyendo la velocidad de convergencia. Este problema de reselección se resuelve con el algoritmo Orthogonal Matching Pursuit, ya que en cada iteración se toma la columna que genera la máxima proyección para formar el nuevo diccionario. Se ha demostrado que eliminando la reselección de columnas, el algoritmo OMP puede obtener un estimado del canal más preciso. En la siguiente tabla se compara el error cometido por ambos algoritmos en la estimación de canales sparse en comunicaciones:

Algoritmo	**Error cuadrático medio**
MP	$2{,}9871 \times 10^{-15}$
OMP	$9{,}7812 \times 10^{-27}$

  Tabla 11. Error cuadrático medio obtenido en la reconstrucción del canal sparse empleando los algoritmos MP y OMP.

  Como podemos comprobar, los algoritmos MP y OMP se pueden emplear en la reconstrucción de un canal sparse a pesar de que en este caso no se cumpla $m \ll n$, si no que el número de mediciones m será mayor o igual a la longitud de la señal n.

- Detección de sinusoides: se han estudiado estos algoritmos en la recuperación de señales sparse en el dominio de la frecuencia, es decir, señales formadas por sumas de cosenos a distintas frecuencias.

  Tanto MP como OMP son algoritmos iterativos que tratan de encontrar el átomo del diccionario que aporta mayor contribución a la definición de la señal proyectada. En este caso encontrar esos átomos del diccionario, conlleva encontrar las frecuencias que están presentes en nuestra señal sparse. Comprobamos que aunque esas frecuencias estén bastante próximas, los algoritmos MP y OMP pueden distinguirlas perfectamente. Tras encontrar los átomos del diccionario que aportan la mayor contribución a la definición de la señal, estos algoritmos reconstruyen dicha señal.

  Se ha realizado la reconstrucción de señales sparse en el dominio de la frecuencia formadas por 2 y por 4 cosenos a distintas frecuencias y hemos comprobado que en ambos casos se puede reconstruir la señal con un error muy bajo. En la siguiente tabla se comparan los errores obtenidos en la reconstrucción de dichas señales sparse:

Método de reconstrucción	Error de reconstrucción señal 2-sparse	Error de reconstrucción señal 4-sparse
MP	$2{,}8285 \times 10^{-14}$	3.7573×10^{-13}
OMP	$5{,}2111 \times 10^{-29}$	1.2912×10^{-28}

Tabal 12. Comparación del error obtenido en la reconstrucción de señales sparse en el dominio de la frecuencia empleando los algoritmos MP y OMP.

Vemos en esta tabla que el error cometido no depende del número de cosenos que conformen la señal, si no que el orden del error cuadrático medio es prácticamente el mismo en ambos casos. Comparando con la Tabla 9, vemos que el error cometido en la reconstrucción de señales sparse en el dominio de la frecuencia es del mismo orden al cometido en el dominio del tiempo.

Por último se han realizado reconstrucciones de señales sparse en el dominio de la frecuencia con ruido blanco gaussiano aditivo, comprobando, al igual que en el dominio del tiempo, que el error cometido disminuye al disminuir la potencia de la señal de ruido (es decir, al aumentar la relación señal a ruido).

También se ha presentado, pero no se ha desarrollado en este proyecto, la aplicación de la teoría del Compressive Sensing a la reconstrucción de imágenes, estudiando una serie de algoritmos y un hardware específico presentado por Wakin y Baraniuk [20]. Este dispositivo consiste en una cámara de un solo pixel de forma que, el campo luminoso incidente (que corresponde a la imagen deseada x) se refleja en un dispositivo digital de micro espejos que forman una matriz (Digital Micromirror Device ,DMD). La orientación de estos espejos está modulada por el patrón pseudo aleatorio ϕ_m suministrado por el generador de números aleatorios (Random Number Generator, RNG). Cada espejo produce un voltaje en el fotodiodo que se corresponde con la proyección *y(m)*. Este conjunto de proyecciones se empleará en la reconstrucción de la señal a partir de los algoritmos iterativos estudiados, MP y OMP. Algunas características de este dispositivo, como la simplicidad, universalidad, robustez y escalabilidad, le permitirá tener efecto sobre una gran variedad de aplicaciones diferentes.