Capítulo 6

MEC para el Problema Elástico Tridimensional sobre materiales exponencialmente graduados isótropos

Sea un dominio tridimensional D elástico y exponencialmente graduado, con un contorno ∂D, en el que se tiene una solución real la cual, para cada punto $\mathbf{Q}$ tiene unos valores de los desplazamientos, tensor de deformaciones, tensor de tensiones, fuerzas de volumen y fuerzas de contorno dados por u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, X_i(si $\mathbf{Q} \in D$) y t_i(si $\mathbf{Q} \in \partial D$). A su vez se tiene que la matriz Solución Fundamental para una carga puntual aplicada en un punto $\mathbf{P} \in D$ viene dada por $G_{ij}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, y que la matriz que representa las tensiones en dirección normal al contorno en un punto $\mathbf{Q}$ provocadas por dicha carga puntual en $\mathbf{P}$ es $T_{ij}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. La identidad de Somigliana, que es la ecuación integral en la que se fundamenta el Método de Elementos de Contorno, relaciona los parámetros anteriores de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{P}) &+ \int_{\partial D} T_{ji}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) u_i(\mathbf{Q}) ds(\mathbf{Q}) = \int_{\partial D} G_{ji}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) t_i(\mathbf{Q}) ds(\mathbf{Q}) \\ &+ \int_{D} X_i(\mathbf{S}) G_{ji}(\mathbf{P}, \mathbf{S}) dv(\mathbf{S}) \qquad \mathbf{P} \in D; \quad \mathbf{S} \in D; \quad \mathbf{Q} \in \partial D. \end{aligned} \tag{6.1}$$

La identidad de Somigliana para el Problema Elástico Tridimensional sobre materiales exponencialmente graduados isótropos coincide con la del problema homogéneo. La diferencia está en las expresiones del núcleo G_{ji} y del núcleo T_{ji}.

Puesto que este trabajo se centra en la implementación de los núcleos propios usados en el Método de los Elementos de Contorno (MEC) y no en la implementación de las ecuaciones integrales de este método, se va a dar una explicación muy breve de los conceptos que llevan a la formulación de dicho método. Para una información detallada del MEC se puede consultar París, F. y Cañas, J. '*Boundary Element Method. Fundamentals and Applications.*'.

Si se discretiza la superficie exterior del sólido quedará un conjunto de elementos (K) y nodos (N). Suponiendo $X_i = 0$, y tomando el punto $\mathbf{P}$ del contorno, la Identidad de Somigliana queda de la siguiente forma:

$$C_{ji}(\mathbf{P})u_j(\mathbf{P}) + \sum_{k=1}^{K} ⨍_{\partial D_k} T_{ji}(\mathbf{P},\mathbf{Q})u_i(\mathbf{Q})ds_k(\mathbf{Q}) = \sum_{k=1}^{K} \int_{\partial D_k} G_{ji}(\mathbf{P},\mathbf{Q})t_i(\mathbf{Q})ds_k(\mathbf{Q})$$
$$\mathbf{P} \in \partial D; \quad \mathbf{Q} \in \partial D. \tag{6.2}$$

donde ∂D_k es la parte del contorno discretizado correspondiente al elemento k; C_{ji} se conoce como la matriz de coeficientes del término libre. El símbolo $⨍$ representa en este caso una integral con valor principal de Cauchy.

Los desplazamientos en el contorno u_i se sustituyen por unos desplazamientos aproximantes $\tilde{u}_i$. Cada coordenada de estos desplazamientos depende de un número determinado de parámetros (L) cuyos valores pasan a ser las incógnitas del problema. El MEC consiste en aplicar la ecuación (6.2) en L puntos del contorno y resolver el sistema resultante con 3xL incógnitas.

En el caso de materiales materiales exponencialmente graduados el núcleo $\mathbf{G}$ viene dado por la expresión (3.3). En este caso la singularidad cuando $r \to 0$ viene contenida en el sumando $\exp\{-\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{P})\}\, \mathbf{G}^0(\mathbf{Q};\mathbf{P})$ y es de tipo 1/r. Esto supondrá una gran ventaja a la hora de realizar la integral primera del segundo término de la ecuación (6.1), debido a que en la parte singular de dicha integral no interviene el término $\mathbf{G}^g$, cuyas expresiones son bastante complicadas.

El núcleo $\mathbf{T}$ depende de las expresiones de $\frac{\partial G_{jl}(\mathbf{Q},\mathbf{P})}{\partial Q_k}$. Tal y como se puede comprobar en (4.1), $\frac{\partial G_{jl}(\mathbf{Q},\mathbf{P})}{\partial Q_k}$ tiene tres términos principales. Las singularidades de estos términos son:

- El término G_{jl} presenta singularidad de tipo 1/r, contenida en el término G^0_{jl}.
- El término $\mathrm{e}^{-\beta(Q_3+P_3)} \frac{\partial G^0_{jl}}{\partial Q_k}$ tiene singularidad de tipo $1/r^2$ tal y como se puede ver en (4.2).
- El término $\mathrm{e}^{-\beta(Q_3+P_3)} \frac{\partial G^g_{jl}}{\partial Q_k}$ presenta singularidad del tipo 1/r tal y como se puede ver en (4.3).

En el caso de la integral en el lado izquierdo de la igualdad de la ecuación (6.1), en la que interviene el núcleo $\mathbf{T}$, en la parte singular de la integral no solo intervienen los términos asociados a la función de Kelvin G^0_{jl} y sus derivadas, sino que también influye $\frac{\partial G^g_{jl}}{\partial Q_k}$. Esto deberá tenerse en cuenta cuando se desarrollen métodos para la realización de esta integral singular.