

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales

**ESTUDIO DINÁMICO DEL DISCO DE
EULER: SIMULACIÓN 3D Y SENSIBILIDAD A
LA DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA.**

Autor: Javier Escudero Muñoz

Tutores: Manuel Toscano Jiménez y Emilio Freire Macías

Dep. de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de las Tecnologías Industriales
Intensificación Mecánica-Máquinas

**ESTUDIO DINÁMICO DEL DISCO DE EULER:
SIMULACIÓN 3D Y SENSIBILIDAD A LA
DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA.**

Autor:

Javier Escudero Muñoz

Tutor:

Manuel Toscano Jiménez

Emilio Freire Macías

Dep. de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2015

Trabajo Fin de Grado: Estudio Dinámico del Disco de Euler: Simulación 3D y Sensibilidad a la Disipación de la Energía.

Autor: Javier Escudero Muñoz

Tutores: Manuel Toscano Jiménez y Emilio Freire Macías

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo Fin de Grado arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2015

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis amigos y compañeros

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero mostrar mis palabras de agradecimientos hacia el profesor Don Manuel Toscano Jiménez, por mostrarme en todo momento su atención y cercanía durante la labor de este trabajo. Y, además de agradecer todas sus enseñanzas, por incentivar-me a estudiar el mundo de la Mecánica.

Agradecer a todos los que me han ayudado durante estos años de estudio en la Escuela Superior de Ingeniería de Sevilla. A mis compañeros y amigos de la Escuela que no olvidaré nunca.

Y, por último, a mi familia. En especial a mi padre, por haberme enseñado la valía del sacrificio en el trabajo, a mi madre, por su apoyo incondicional, a mis hermanos mayores, Manuel y Rocío, por ser los espejos en los que mirarme, y a mi hermano pequeño, Emilio, por estar siempre a mi lado. A todos mis amigos de toda la vida y a María.

Javier Escudero Muñoz

Sevilla, 2015

RESUMEN

El Trabajo Fin de Grado, que se desarrolla en esta memoria, consta de tres partes principales bien diferenciadas. Una introducción extendida del problema de Euler, un primer capítulo que permite la comprensión de la programación desarrollada a través del programa de Matlab para la simulación 3D del problema y, por último, un segundo capítulo que se adentra en el estudio del problema de la disipación de energía en el disco de Euler y su resolución mediante Matlab.

La primera parte de la memoria se titula Introducción general, en ella podemos encontrar las razones que motivan al desarrollo del estudio del Disco de Euler. Además, se exponen todos los objetivos que se proponen y llevan a cabo durante la explicación del trabajo. Por último, en esta sección el lector encontrará todos los conceptos extraídos de artículos y trabajos previos que pueden encontrarse en la literatura, dichos trabajos sirven de guía para la realización del TFG y su comprensión.

El primer capítulo consta de la muestra de todos los conocimientos de programación de Matlab para desarrollar la simulación 3D del disco de Euler. Se expone cómo, a partir de la solución del problema físico del disco de Euler, podemos obtener una simulación 3D.

En el segundo capítulo se explica detenidamente la introducción del modelado de la disipación de energía mediante la fricción en el problema de Euler. Además, se desarrolla el modelo matemático que resuelve el problema y se explica los resultados obtenidos. En bibliografía podemos encontrar publicaciones que desarrollan el problema del disco de Euler, y cómo en ellas desarrollan una expresión capaz de relacionar la velocidad de giro del disco con el tiempo. El fin del Trabajo Fin de Grado es encontrar, mediante la creación de un modelo matemático que resuelva el problema no ideal, dicha expresión y comparar los resultados obtenidos con los de la literatura.

Finalmente, encontraremos en la memoria los anexos. Éstos se componen de los programas desarrollados en Matlab y unas tablas resumen de las diferentes expresiones obtenidas que relacionan la velocidad de giro con el tiempo.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Índice	xii
Introducción General	1
0.1. <i>El artículo de Moffatt</i>	1
0.2. <i>El trabajo de Le Saux, Glocker y Leine</i>	2
0.2.1 Dynamics of a Rolling Disk in the Presence of Dry Friction	2
0.2.2 Measurements of the Finite-time Singularity of the Euler Disk	3
0.3. <i>Las vibraciones transversales del disco de Euler</i>	4
0.4. <i>Objetivos del Trabajo Fin de Grado</i>	4
0.5. <i>Descripción del sistema a estudio</i>	5
0.5.1 Elección de las coordenadas	5
0.5.2 Definiciones previas	6
0.6. <i>Resumen del Proyecto Fin de Carrera de partida</i>	6
0.6.1 Ecuaciones de movimiento del sistema a estudio	6
0.6.2 Programa general de Matlab para la resolución de las ecuaciones de movimiento	7
0.6.3 Soluciones estacionarias del disco de Euler	8
0.8. <i>Estudio cinemático, aproximación plana</i>	8
Capítulo 1: Simulación 3D	11
1.1. <i>Introducción al capítulo</i>	11
1.2. <i>Metodología de la función</i>	11
1.3. <i>Datos de partida</i>	12
1.4. <i>Representación del disco de Euler</i>	12
1.4.1 Orientación espacial del disco	12
1.4.2 Cálculo del centro de gravedad del disco	15
1.4.3 Gráfico 3D	15
1.5. <i>Conclusiones del capítulo 1</i>	18
Capítulo 2: Disipación de la Energía	19
2.1. <i>Introducción al capítulo</i>	19
2.2. <i>Modelado de la disipación de energía</i>	19
2.2.1 El modelado de la función de disipación de Rayleigh	19
2.2.2 El modelado de la función de disipación de ley de Coulomb	20
2.3. <i>Obtención de las ecuaciones de movimiento</i>	21
2.3.1 Estado cinemático del disco de Euler	21
2.3.2 Distribución de masas	22
2.3.3 Cálculo de la energía cinética y potencial del disco	22
2.3.4 Aplicación de la ecuación de Lagrange	23
2.4. <i>Programación Matlab del modelo numérico</i>	24
2.4.1 El programa general	24
2.4.2 Función “ecuacionesfriccion”	24
2.4.3 Programas de post-procesado	25
2.5. <i>Resistencia a la rotación, pivotamiento y rodadura</i>	25
2.6. <i>Análisis de la función de disipación de Rayleigh</i>	26
2.6.1 Análisis de la función de disipación asignada al ángulo de caída	26
2.6.2 Análisis de la función de disipación asignada al ángulo de guiñada	27
2.6.3 Análisis de la función de disipación asignada al ángulo de rotación propia	32
2.7. <i>Análisis del modelado de la disipación de Coulomb</i>	41
2.7.1 Análisis del modelado de Coulomb asignado al ángulo de guiñada	41
2.7.2 Análisis del modelado de Coulomb asignado al ángulo de rotación propia	48
2.8. <i>Conclusiones del capítulo 2</i>	56

2.8.1	Conclusiones del TFG	56
2.8.2	Conclusiones de la comparación con la literatura	57
2.8.3	Conclusión final	58
	Bibliografía	59
	Anexos	60
	<i>Anexo 1: Programa general</i>	60
	<i>Anexo 2: Ecuaciones</i>	60
	<i>Anexo 3: disco3D</i>	61
	<i>Anexo 4: AnalisisFriccion</i>	65
	<i>Anexo 5: EcuacionesFriccion</i>	66
	<i>Anexo 6: PostProcesado1</i>	67
	<i>Anexo 7: PostProcesado2</i>	69
	<i>Tabla 1: Función de Rayleigh asignada al ángulo de guiñada</i>	72
	<i>Tabla 2: Función de Rayleigh asignada al ángulo de rotación propia</i>	74
	<i>Tabla 3: Modelado de Coulomb asignado al ángulo de guiñada</i>	75
	<i>Tabla 4: Modelado de Coulomb asignado al ángulo de rotación propia</i>	77

INTRODUCCIÓN GENERAL

El jugueteo con una moneda es un hecho muy común, todos la hemos lanzado alguna vez y observado el movimiento que reproduce mientras gira alrededor de ella misma. Este hecho cotidiano fue objeto de estudio para Euler, de ahí el nombre de “Disco de Euler”, y, más adelante, para distintos físicos, matemáticos e ingenieros como Moffatt [1], Cedric Le Saux, Christoph Glocker o R. Leine [2] y [3]. Estos trabajos motivan al Trabajo Fin de Grado (TFG) a abordar el estudio y análisis de la disipación de energía del problema físico del disco de Euler y la creación de la simulación 3D. No obstante, es preciso destacar que el tema central del TFG es el modelado de la disipación de energía.

Como punto de partida para el TFG se tiene el Proyecto Fin de Carrera (PFC) dirigido por los profesores D. Manuel Toscano Jiménez y D. Emilio Freire Macías y realizado por D. Damián Sánchez Pérez, de título: “Un estudio analítico y numérico del disco de Euler ideal: efecto giroscópico, estabilidad y axoides”. Por otro lado, artículos publicados por Keith Moffatt [1] y los ingenieros Le Saux, Glocker y Leine [2] y [3] o Villanueva y Epstein [4] sirve como guía para el análisis de la disipación de energía.

Para la correcta comprensión del TFG es necesario explicar conceptos obtenidos del PFC y de los distintos trabajos que servirán de guía. Por ello, a continuación se exponen dichos trabajos.

0.1 El artículo de Moffatt [1]

Keith Moffatt [1] es un reputado matemático escocés, impartió clase durante 22 años en la Universidad de Cambridge. En el año 2000 publicó para la revista “Nature” su artículo de título “Euler’s disk and its finite-time singularity” [1]. Dicho artículo retomaba el trabajo de Euler y su estudio sobre el disco, el artículo consiguió poner de moda este problema.

En su artículo [1], Moffatt [1] comienza destacando la observación de una moneda pivotando sobre una mesa. Todos hemos contemplado cómo a medida que la moneda llega el momento de su parada, se percibe un zumbido de alta frecuencia. Dicho zumbido se debe a que la velocidad con la que la moneda gira se ve incrementada bruscamente. El enigma del problema reside en explicar que le sucede al disco mientras que se produce el aumento repentino de la velocidad de giro si la parada del disco es inminente, dos hechos contradictorios. Moffatt [1] intenta demostrar mediante su artículo como la capa de aire existente entre el disco y la mesa es capaz de provocar este fenómeno.

Tras el modelado, resolución y análisis del problema, Moffatt [1] llega a la conclusión de la existencia de una expresión que es capaz de relacionar la velocidad de giro de la moneda con la variable tiempo. El resultado interesante de Moffatt [1] para el desarrollo y análisis de este TFG es:

$$\Omega \approx (t_0 - t)^\beta$$

Donde:

- Ω , es la velocidad de giro del disco asignada al ángulo de guiñada.
- t_0 , es el tiempo de parada.
- t , es la variable tiempo.
- β , es la pendiente que relaciona dicha expresión.

Moffat [1] determina que el valor de la pendiente es: $\beta = -1/6$. Dicha expresión ha sido objeto de estudio y análisis en otros artículos publicados como veremos más adelante, de los cuales se han obtenido diferentes valores para la misma pendiente β . En este Trabajo Fin de Grado, trataremos de crear un modelado del cual extraer el valor de dicha pendiente β , y así, poder comparar los distintos resultados obtenidos.

Por otro lado, Moffatt [1] consiguió obtener la expresión de otra relación que determina el valor del ángulo de caída del disco:

$$\theta \approx (t_0 - t)^{-1/3}$$

El hecho de poder aproximar la velocidad de giro y el ángulo de caída mediante dicha expresión, motiva a la búsqueda, como se ha comentado, de un modelado de fricción que permita obtener resultados comparables con el de Moffatt.

0.2 El trabajo de Le Saux, Glocker y Leine [2] y [3]

Estos tres ingenieros mecánicos del Institute of Mechanical Systems de Zurich, presentaron en el año 2005 su trabajo sobre el disco de Euler. En la revista “Journal of Nonlinear Science” publicaron el artículo de título “Dynamics of a Rolling Disk in the Presence of Dry Friction” [2]. Este artículo es muy importante para el desarrollo del TFG, ya que se centra principalmente en la fricción seca, al igual que el TFG, y se puede obtener diversos resultados y conclusiones interesantes.

Años más tarde, en el año 2009 se publicó el artículo “Measurements of the Finite-time Singularity of the Euler Disk” [3]. El autor de dicho artículo fue el ingeniero R. Leine [3], de esta manera prosiguió con el estudio del problema del disco de Euler. Esta publicación es otro de los artículos guía fundamentales para el trabajo que se realiza en el TFG.

0.2.1 Dynamics of a Rolling Disk in the Presence of Dry Friction (Le Saux, Glocker y Leine) [2]

Se propusieron como objetivos de su estudio el desarrollo de un modelo matemático que simulase la dinámica del disco en movimiento y el análisis de la dinámica del disco. En su modelo matemático consiguen simular la disipación de energía teniendo en cuenta el contacto entre el soporte y el disco, las colisiones existentes, otros efectos de disipación e incluso la pérdida de contacto con el soporte. Por otra parte, el análisis de la dinámica del disco lo realizan a partir del modelo creado y mediante la comparación de los resultados obtenidos con los obtenidos en el resto de la literatura.

El modelo matemático que se desarrolla en su trabajo es el más simple posible, ya que los autores dejan claro que su único objetivo es mostrar la física más importante del disco. Dicha simplificación les lleva a definir en el disco tres puntos separados 120° entre cada uno, sobre estos puntos se definen las condiciones de contacto. A partir de la creación del modelo y la obtención de las velocidades se desarrollan las leyes que consideran:

- La fricción de Coulomb-Contensou.
- El contacto unilateral.
- La fricción de rodadura.

Realizado el modelo matemático, analizan la fricción desarrollando cuatro apartados en los que obtienen los siguientes datos experimentales de la puesta en marcha del modelo:

- Simulación con fricción de Coulomb:

Tras la simulación se concluye que el disco se encuentra en todo momento en un estado de fricción, además, se determina que la fricción de Coulomb es una restricción no holónoma. El disco muestra en la evolución del ángulo de caída oscilaciones en su movimiento debidas a la fricción. La fricción por

rodadura no disipa energía, obviamente. Sin embargo, se disipa el 0,2% de la energía en un intervalo de tiempo de 10^{-4} s.

- Simulación con fricción de Coulomb y de contorno:

Esta simulación provoca sobre el disco un movimiento sin deslizamiento en los segundos iniciales. Se determina que la aparición del deslizamiento provoca una disminución elevada de la energía y del ángulo de caída. Y las conclusiones más importantes, la velocidad de rotación propia del disco tiende a infinito en los instantes finales y el mecanismo de disipación principal es la fricción de contorno. Por último, se observa la frecuencia de las oscilaciones es elevada en los instantes finales.

- Simulación con fricción de Coulomb-Contensou:

Con este tipo de fricción, el disco desliza y pivota decreciendo su energía. La disipación de energía se debe a la fuerza de contacto tangencial. La energía tiende a cero asintóticamente.

- Simulación con fricción de Coulomb-Contensou y de contorno:

Los primeros instantes de tiempo de simulación el movimiento es similar al del apartado anterior. La disipación debida a la fricción de contorno es pequeña en relación a la de Coulomb-Contensou al inicio. Sin embargo, la fricción de contorno es la más importante en los instantes finales.

A parte, al igual que Moffatt [1], del trabajo desarrollado consiguen una aproximación para la velocidad de rotación propia mediante la expresión:

$$\Omega \approx (t_0 - t)^\beta$$

Donde se obtiene el valor de la pendiente:

- $\beta = -1/3$ para la fricción de contorno seca.
- $\beta = -1/4$ para la fricción de contorno viscosa.
- $\beta = -1/1$ para la fricción seca clásica.

Dichos valores son comparados con los existentes en la literatura. Y, además, al igual que el valor de la pendiente de Moffatt [1], servirán para compararlos con los que se obtendrán en el TFG.

Como conclusión del trabajo, consiguen obtener resultados numéricos razonables correspondientes al movimiento del disco. El análisis sobre la fricción da como resultado valores que concuerdan bastante bien con sus correspondientes valores de energía. En definitiva, deducen que el modelo numérico obtenido es una buena base para el análisis dinámico entre objetos cilíndricos y planos.

0.2.2 Measurements of the Finite-time Singularity of the Euler Disk (Leine) [3]

Por otro lado, R. Leine [3] publicó en el año 2009 el artículo “Measurements of the Finite-time Singularity of the Euler Disk” [3]. En dicho trabajo, Leine [3] se centra en analizar el movimiento del disco durante la fase final. Para ello, realiza un estudio teórico y otro experimental mediante cámaras de alta velocidad. Su trabajo permite mostrar cuál es la forma en la que el disco disipa mayor energía durante este intervalo de tiempo tan importante (fase final de caída) mediante la combinación teórica-experimental.

Lo importante del trabajo de Leine [3] para nuestro TFG, al igual que el artículo de Moffatt [1] o el artículo que Leine [3] publicó con sus compañeros, son los valores de las pendientes β que se obtiene de la relación existente entre las velocidades y el tiempo. Leine [3] consigue deducir en su trabajo los siguientes resultados:

$$\Omega \approx (t_0 - t)^\beta$$

Donde el exponente β toma el valor $-1/2$ o $-2/3$, en función del valor de la diferencia entre el tiempo y el tiempo final. Dichos valores los compara con los de Moffatt [1] y otros obtenidos de la literatura.

0.3 Las vibraciones transversales del disco de Euler

En el año 2005, se publica el artículo titulado como “Vibrations of Euler’s Disk” [4], escrito por Roberto Villanueva y Marcelo Epstein [4]. El trabajo trata sobre la creación de un modelo matemático capaz de analizar las vibraciones transversales del disco de Euler mediante la mecánica clásica.

Se marca como objetivo del artículo la creación de un modelo numérico basado en un disco de Euler de deformable parcialmente. Se busca que dicho modelo matemático sea capaz de conseguir nuevos conocimientos sobre el problema mediante la mecánica clásica en lugar de la mecánica de los medios continuos.

A continuación, se exponen las conclusiones que se extraen del artículo. Se detecta mediante el modelo que sobre el disco cuando aumenta la frecuencia en los instantes finales del movimiento aparece una frecuencia forzada y una fuerza de reacción en el punto de contacto que se corresponde con la velocidad angular del disco. Se interpreta como una medida del sonido producido durante los instantes finales. Además, ratifican que en los instantes finales, la disipación se debe al deslizamiento. Por otro lado, apoyan que el hecho de la existencia de vibraciones se debe a la pérdida de contacto para valores cercanos a $\pi/2$ radianes del ángulo de caída (disco en horizontal). Finalmente, cabe destacar que el artículo determina que el material del disco es influyente en la calidad y frecuencia del sonido en los instantes finales del movimiento.

0.4 Objetivos del Trabajo Fin de Grado

El PFC, del que parte este Trabajo Fin de Grado, da como resultado un estudio ideal del problema físico del disco de Euler, por lo que el TFG tiene como fin principal incorporar y analizar la fricción al problema desarrollado por D. Sánchez [5] y estudiar el efecto que conlleva sobre el disco. Así como comparar los resultados del análisis de la disipación de energía con los de los artículos reseñados. El tipo de fricción que tratará de modelar este TFG mediante un modelo matemático es la fricción seca, de ahí que el artículo “Dynamics of a Rolling Disk in the Presence of Dry Friction” sea uno de los trabajos más importantes, existentes en la literatura, que podemos tomar como guía. Tal y como se ha comentado, la intención de TFG es ampliar el modelo numérico base del estudio ideal del disco de Euler realizado por D. Sánchez [5]. Al igual que han realizado Leine [3] o Moffatt [1], mediante la solución del La modelo y su análisis, se buscará el valor de la pendiente β que relaciona la velocidad con el tiempo.

La memoria del TFG se encuentra dividida en tres grandes partes, la Introducción general, en la cuál nos encontramos, trata de colocar al lector en situación del porqué del trabajo. El primer capítulo del TFG consistirá en la explicación de la programación realizada para conseguir la simulación 3D del disco de Euler. El capítulo no tiene ningún fundamento físico, solamente se basa en el desarrollo de los conocimientos de programación de Matlab con el fin de obtener una idea del movimiento que describe el disco a partir de la solución del problema físico del mismo.

El segundo capítulo, y más importante, se centra en el estudio y modelado de la disipación de energía. Para llevar a cabo este análisis, se explica la creación de un modelo numérico mediante Matlab que modelará la fricción gracias a la función de disipación de Rayleigh y, por otro lado, a la ley de Coulomb. Mediante la obtención de las evoluciones del centro de gravedad del disco y el ángulo de caída con el tiempo, así como los valores de la pendiente β que relacionan velocidades obtenidas con el tiempo, podremos analizar el efecto de la fricción. Dicho análisis se realizará comparando los resultados obtenidos con los resultados de los trabajos comentados.

0.5 Descripción del sistema a estudio

0.5.1 Elección de las coordenadas

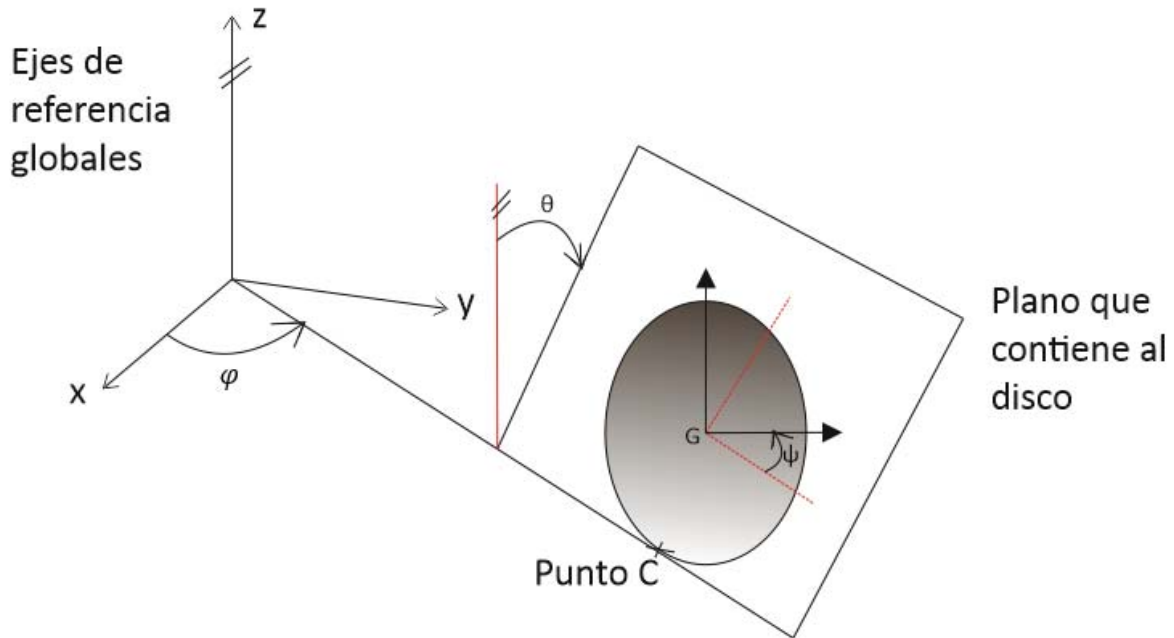


Figura 1.

Como puede observarse en la figura 1, se llega a la conclusión que las coordenadas que permiten conocer la posición del disco en todo momento son:

- **Punto de contacto C:** posición del vector $(x_c \ y_c \ z_c)$ correspondiente al punto de contacto entre el plano X-Y ($z_c=0$) y el disco en todo momento, son coordenadas que ayudan a describir el problema.
- **Ángulo de guiñada o de precesión, φ :** se trata del ángulo que forma una línea imaginaria que une el punto C con el origen del sistema global y el eje global X.
- **Ángulo de vuelco o caída, θ :** es el ángulo que forma el plano que contiene al disco y el eje Z.
- **Ángulo de rotación propia o de rodadura, ψ :** como muestra la figura 1 es el ángulo que forma el eje local x_2 con el eje x_{CDG} perteneciente al disco.

Es muy importante para el problema definir el sentido positivo de los giros. En la figura 1 se observa cómo quedan fijados los sentidos positivos de los giros, es decir, siempre se realizan en el sentido positivo de los ejes alrededor de los cuales se producen los giros.

Finalmente, mediante la solución del modelo numérico conoceremos los valores de estos parámetros en un instante de tiempo cualquiera. Además de permitirnos conocer la posición del disco en el espacio, obtendremos los valores de las velocidades.

0.5.2 Definiciones previas

Al llevar a cabo la solución del problema se debe realizar la definición previa de una serie de parámetros relacionados con la descripción del sistema. Por lo que para todas las resoluciones del problema se definen los parámetros para conseguir la adimensionalización:

- Radio del disco: R_{disco} .
- Peso del disco: m_{disco} .
- Gravedad: $g = 1$ u.g.

Al tomar 1 unidad de gravedad para resolver el problema conlleva un cambio en las unidades de tiempo del mismo. Cambio que se puede apreciar en la siguiente deducción:

La gravedad tiene como valor:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

Si desarrollamos:

$$9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2 / 9,8} = 1 \text{ unidad de gravedad} \leftrightarrow 1 \text{ unidad de tiempo} = \frac{1}{\sqrt{9,8}} \text{ s}$$

Por lo que la unidad de tiempo cuando resolvamos el problema toma el valor

$$1 \text{ ut} = 0,3194 \text{ s}$$

0.6 Resumen del Proyecto Fin de Carrera de partida

El Proyecto Fin de Carrera del cual parte este TFG se centra, en su inicio, en la obtención de las ecuaciones de movimiento del disco de Euler. Por otro lado, D. Sánchez [5] continúa con el estudio de la estabilidad y los axoides. Sin embargo, para este TFG es interesante hacer un breve resumen del primer apartado y una reseña de la estabilidad.

A continuación, todo lo que se obtiene en este apartado es trabajo desarrollado por D. Sánchez [5] en su PFC.

0.6.1 Ecuaciones de movimiento del sistema a estudio

Tras su correspondiente estudio, D. Sánchez [5] consigue obtener las ecuaciones que definen el movimiento del disco. Para llegar a éstas, se apoya en el trabajo realizado por Neimark en su libro “Dynamics of Nonholonomic Systems. Translations of Mathematical Monographs” y aplica las ecuaciones de Lagrange correspondientes a cada una de las coordenadas, habiendo obtenido previamente la energía cinética (T) y potencial (V).

No entraremos en detalle en la deducción de las ecuaciones de movimiento, ya que en el capítulo 2 de este TFG se obtendrán, pero con el correspondiente modelado de la disipación de energía.

Las ecuaciones de movimiento adimensionalizadas que se deducen son:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{\cos \theta} \dot{\psi} \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{4}{3} \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\psi} \dot{\theta} \tan \theta - \frac{3}{2} \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta$$

Que junto a las ecuaciones adimensionalizadas:

$$\dot{x}_c = -\dot{\psi} \cos \varphi$$

$$\dot{y}_c = -\dot{\psi} \sin \varphi$$

Al resolverlas permiten conocer el valor de todas las coordenadas que describen el sistema para cualquier instante de tiempo y su correspondiente valor de las velocidades.

0.6.2 Programa general de Matlab para la resolución de las ecuaciones de movimiento

A continuación, se expone cómo se realiza el programa en Matlab que permite obtener la solución de las ecuaciones de movimiento descritas antes. Además, en el apartado de anexos, podemos encontrar el programa general (anexo 1) de Matlab.

Las ecuaciones de movimiento del sistema se tratan de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Sin embargo, Matlab no permite la solución de éstas, pero con el uso de la función “ode45” y una serie de cambios de variables es posible.

Con el cambio de variables conseguimos que el sistema de ecuaciones diferenciales pase de segundo grado a primer grado. El cambio es:

$$y_1 = \varphi \quad y_4 = \dot{\varphi}$$

$$y_2 = \theta \quad y_5 = \dot{\theta}$$

$$y_3 = \psi \quad y_6 = \dot{\psi}$$

Por lo que se tiene:

$$\dot{y}_1 = \dot{\varphi} = y_4$$

$$\dot{y}_2 = \dot{\theta} = y_5$$

$$\dot{y}_3 = \dot{\psi} = y_6$$

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{y}_4 = \ddot{\varphi} = -\frac{2}{\cos y_2} y_6 y_5$$

$$\dot{y}_5 = \ddot{\theta} = \frac{4}{3} y_4 y_6 \cos y_2 + y_4^2 \sin y_2 \cos y_2 + \frac{2}{3} \sin y_2$$

$$\dot{y}_6 = \ddot{\psi} = y_5 y_6 \tan y_2 - \frac{3}{2} y_4 y_5 \cos y_2$$

Todo este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden queda implementado en la función de Matlab que generamos denominada “ecuaciones” (anexo 2). Al poner a correr el programa general, se obtiene la solución del problema físico pudiendo variarse las condiciones iniciales del sistema. Dicha solución queda almacenada en una matriz “y” formada por ocho columnas y tantas filas como instantes de tiempo. La matriz “y” contiene los valores de las coordenadas que definen el sistema (x_c , y_c , ϕ , θ , ψ) y las velocidades correspondientes a los ángulos de guiñada, caída y rotación propia.

0.6.3 Soluciones estacionarias del disco de Euler

En el PFC de partida se analiza detenidamente las condiciones iniciales del problema que provocan que el sistema de ecuaciones diferenciales sea estacionario. Este apartado nos será útil al analizar el efecto de las distintas funciones que se proponen como modelado de la fricción.

En este capítulo del PFC D. Sánchez [5] consigue obtener la siguiente ecuación de estabilidad del sistema:

$$\psi_{est} = \frac{-2 \tan(\theta(0)) - 3\dot{\varphi}^2(0)\sin(\theta(0))}{4\dot{\varphi}(0)}$$

Con esta ecuación se consigue calcular las siguientes condiciones iniciales que implican que el problema sea estacionario:

Condiciones iniciales: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; 1, 0, -1.41]$

Dichas condiciones nos serán útiles en apartados venideros.

0.7 Estudio cinemático, aproximación plana

El fenómeno a estudio del problema del disco de Euler, ya comentado en el apartado 0.1, es el aumento brusco de la velocidad de giro en los instantes finales del movimiento. Para explicar este hecho, existe una posible justificación geométrica.

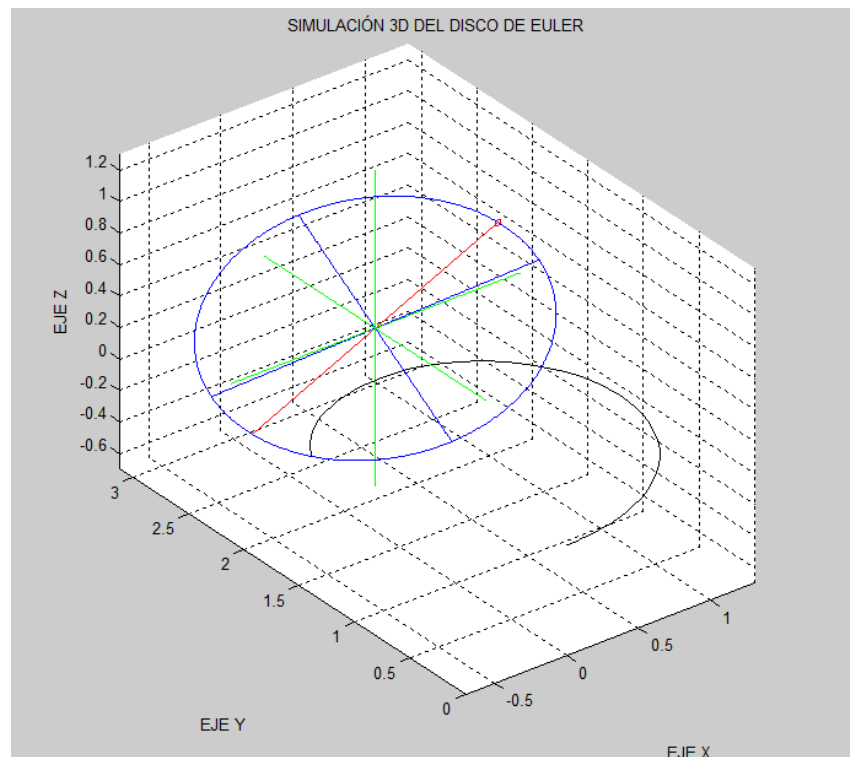


Figura 2.

Imaginemos el disco girando alrededor de una órbita circular como en la figura 2. A medida que el disco aumenta su ángulo de caída y se acerca a $\pi/2$ radianes, el movimiento puede interpretarse como la representación de la figura 3. Visualizando únicamente el plano X-Y, se puede realizar una aproximación plana. En dicha aproximación, se modela el movimiento como dos discos, uno dentro del otro, tal que el disco exterior corresponde a la trayectoria del punto de contacto C del disco y el disco interior corresponde al disco de Euler.

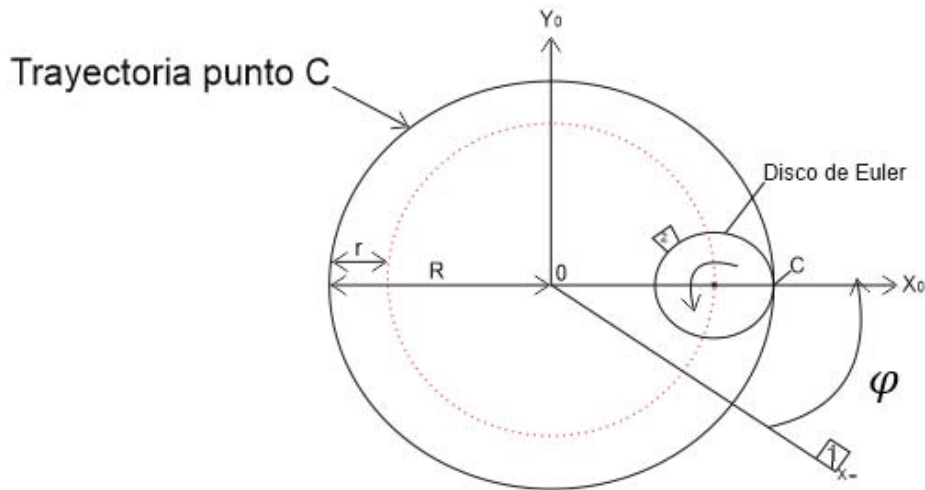


Figura 3.

Las velocidades angulares de los “discos” se definen como:

$$\vec{\omega}_{20} = \dot{\psi} \vec{k} \text{ y } \vec{\omega}_{01} = \dot{\varphi} \vec{k}$$

De forma que en punto de contacto, la velocidad de cada disco toma el valor:

$$\vec{v}_{20}^C = r \dot{\psi} \vec{j}_0$$

$$\vec{v}_{01}^C = R \dot{\varphi} \vec{j}_0$$

Por condición de no deslizamiento se cumple:

$$\vec{v}_{21}^C = \vec{0}, \text{ tal que: } \vec{v}_{21}^C = \vec{v}_{20}^C + \vec{v}_{01}^C = r \dot{\psi} \vec{j}_0 + R \dot{\varphi} \vec{j}_0 = 0$$

Se deduce:

$$r \dot{\psi} = -R \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\psi} = -\frac{R}{r} \dot{\varphi}$$

A medida que el disco se acerca más al plano X-Y, ocurre:

$$R \rightarrow r, \text{ luego: } \dot{\psi} = -\dot{\phi}$$

Mientras que la velocidad del centro de gravedad del disco de Euler:

$$\vec{v}_{21}^G = \vec{v}_{01}^G = (R - r)\dot{\phi}\vec{j}_0$$

Por lo que:

$$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad, implica: } \dot{\phi} \rightarrow \infty$$

De esta manera podría quedar explicado el porqué del cambio brusco de la velocidad de giro del disco en los instantes finales del movimiento.

1.3 Datos de partida

La función “disco3D” necesita la introducción de los resultados del problema físico como datos de partida. Los resultados, como ya se ha hecho constar, se guardan en una matriz de nombre “y” de la siguiente forma:

Tiempo	φ	θ	ψ	$\dot{\varphi}$	$\dot{\theta}$	$\dot{\psi}$	xc	yc
t	y(:,1)	y(:,2)	y(:,3)	y(:,4)	y(:,5)	y(:,6)	y(:,7)	y(:,8)
instante 1	y(1,1)	y(1,2)	y(1,3)	y(1,4)	y(1,5)	y(1,6)	y(1,7)	y(1,8)
instante 2	y(2,1)	y(2,2)	y(2,3)	y(2,4)	y(2,5)	y(2,6)	y(2,7)	y(2,8)
...
instante n	y(n,1)	y(n,2)	y(n,3)	y(n,4)	y(n,5)	y(n,6)	y(n,7)	y(n,8)

El conocimiento de esta matriz nos permite poder graficar el disco de Euler en cada uno de los instantes. Es importante tener en cuenta la restricción que implica el contacto entre el disco y el plano XY en todo momento. Para conseguirlo se impone la condición: $z_c = 0$ metros.

1.4 Representación 3D del disco de Euler

1.4.1 Orientación espacial del disco

Siempre que se realiza una representación 3D de un mecanismo cualquiera es necesario conocer previamente la orientación del sólido en el espacio. Para determinar la orientación del disco de Euler nos apoyamos en las matrices de orientación asociadas a los tres ángulos que describen el sistema. Es decir, las matrices asociadas a los tres giros que realiza el disco: matriz asociada al ángulo de guiñada, matriz asociada al ángulo de caída y la matriz asociada al ángulo de rotación propia.

Matriz de giro asociada al ángulo de guiñada, φ :

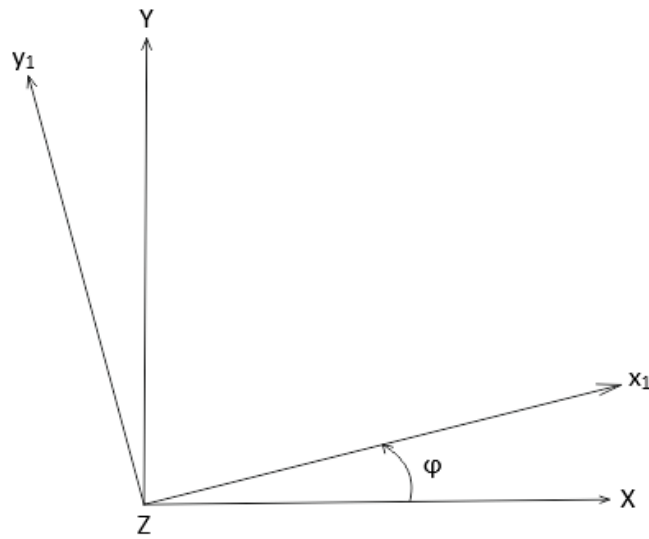


Figura 4.

Le corresponde a este giro la matriz:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de giro asociada al ángulo de caída, θ :

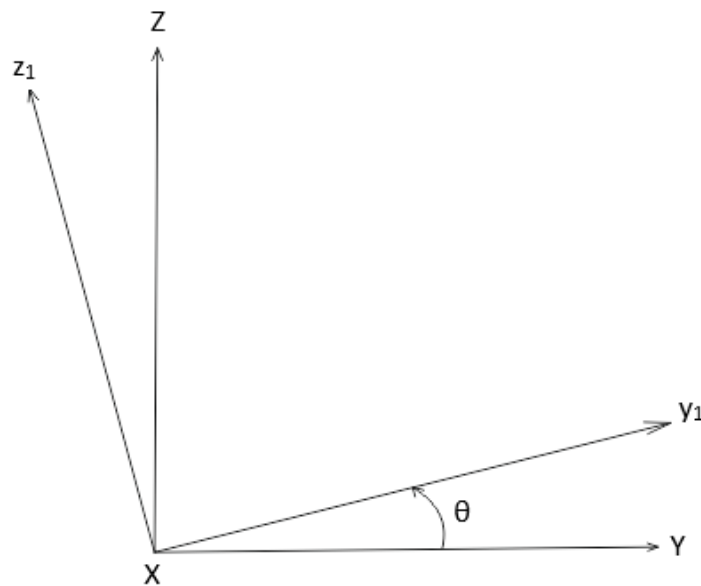


Figura 5.

De forma que se obtiene:

$$\mathbf{A}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Matriz de giro asociada al ángulo de rotación propia, ψ :

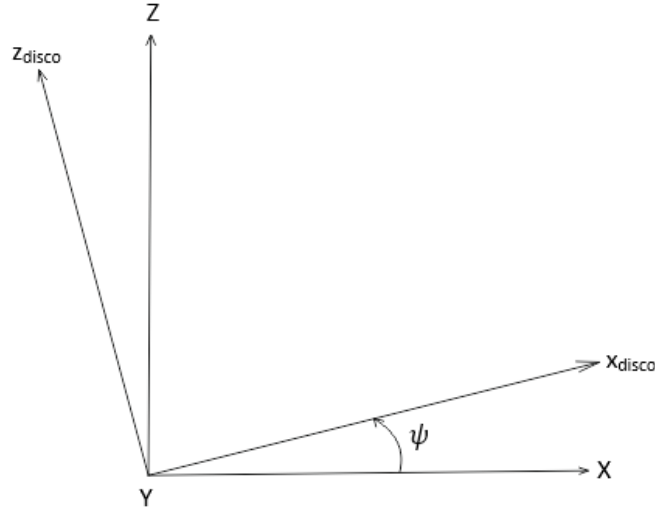


Figura 6.

$$\mathbf{A}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz de giro asociada al disco de Euler es la resultante de multiplicar las tres matrices asociadas a los giros consecutivos:

$$\mathbf{A}_{DISCO} = \mathbf{A}_\varphi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{DISCO} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\sin \varphi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \theta & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix}$$

1.4.2 Cálculo del centro de gravedad del disco

La posición del centro de gravedad del disco de Euler se puede obtener mediante el sencillo cálculo geométrico siguiente

$$r_x^G = x_c + R_{DISCO} \sin \varphi \sin \theta$$

$$r_y^G = y_c - R_{DISCO} \cos \varphi \sin \theta$$

$$r_z^G = R_{DISCO} \cos \theta$$

Conocer la situación del centro de gravedad en cada instante es importante para poder graficar el disco con mayor facilidad.

1.4.3 Gráfico 3D

El comando “plot3” nos permite dibujar gráficas en 3D en Matlab. La función grafica en cada instante de tiempo una circunferencia de radio igual a R_{disco} , con centro en el centro de gravedad del disco y cuya orientación sea la que dicta la matriz A_{DISCO} ya calculada.

A parte, el dibujo de distintos radios móviles y fijos y otros ejes de referencia nos permiten conseguir una mejor interpretación del movimiento que realiza el disco en la simulación 3D. Además, al final de cada simulación se representa la trayectoria seguida por el punto de contacto C del disco.

En la siguiente página, se muestran algunas capturas obtenidas de distintas simulaciones en las que se ha ido variando las condiciones iniciales.

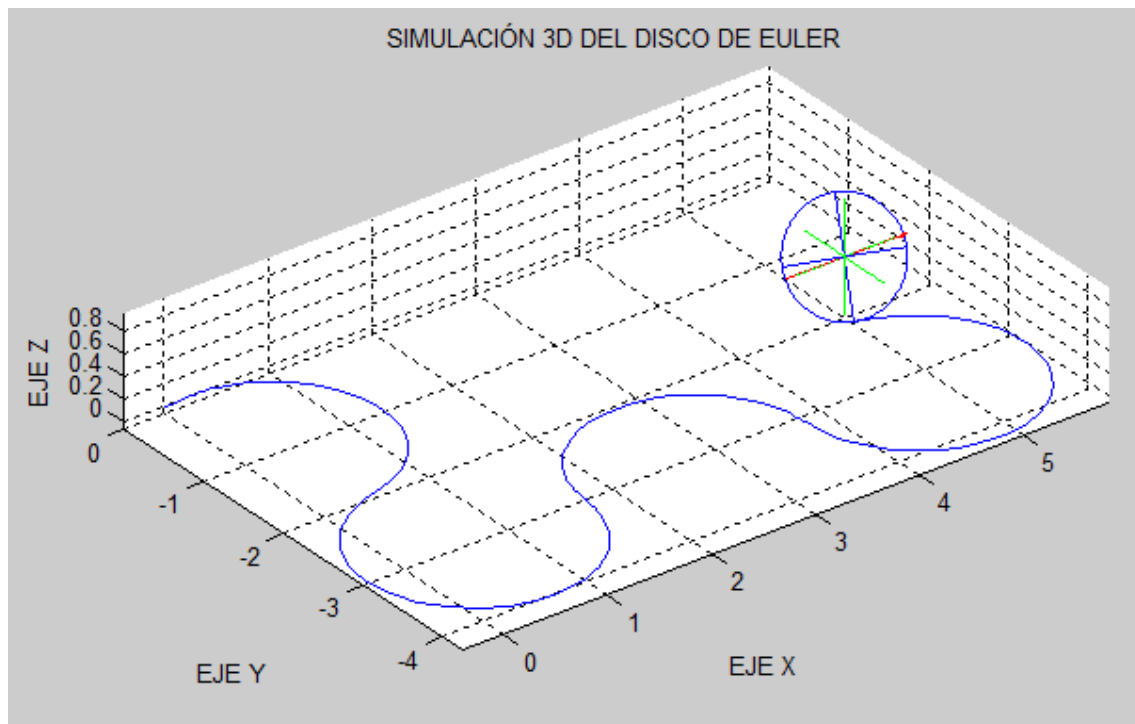


Figura 7.

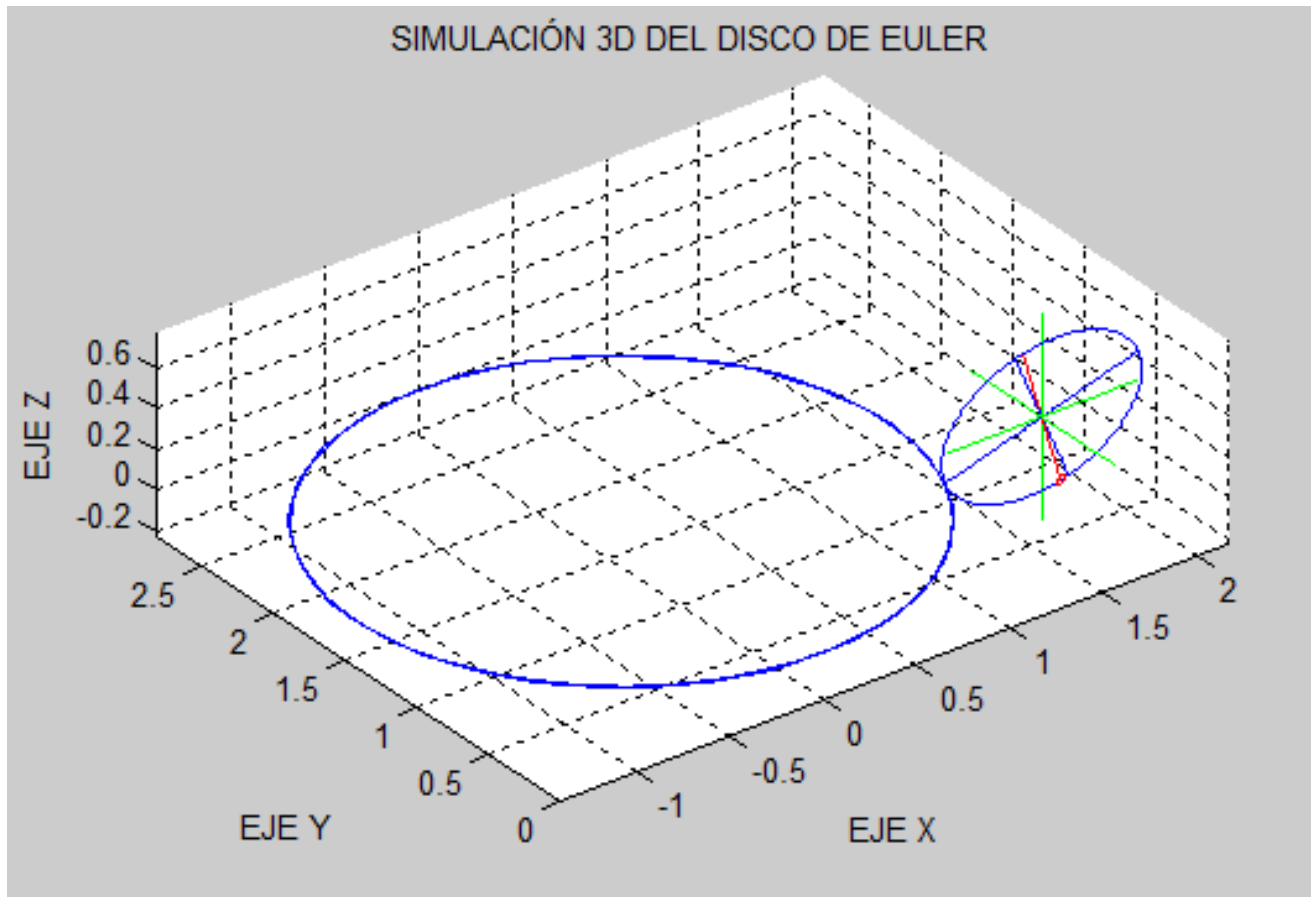


Figura 8.

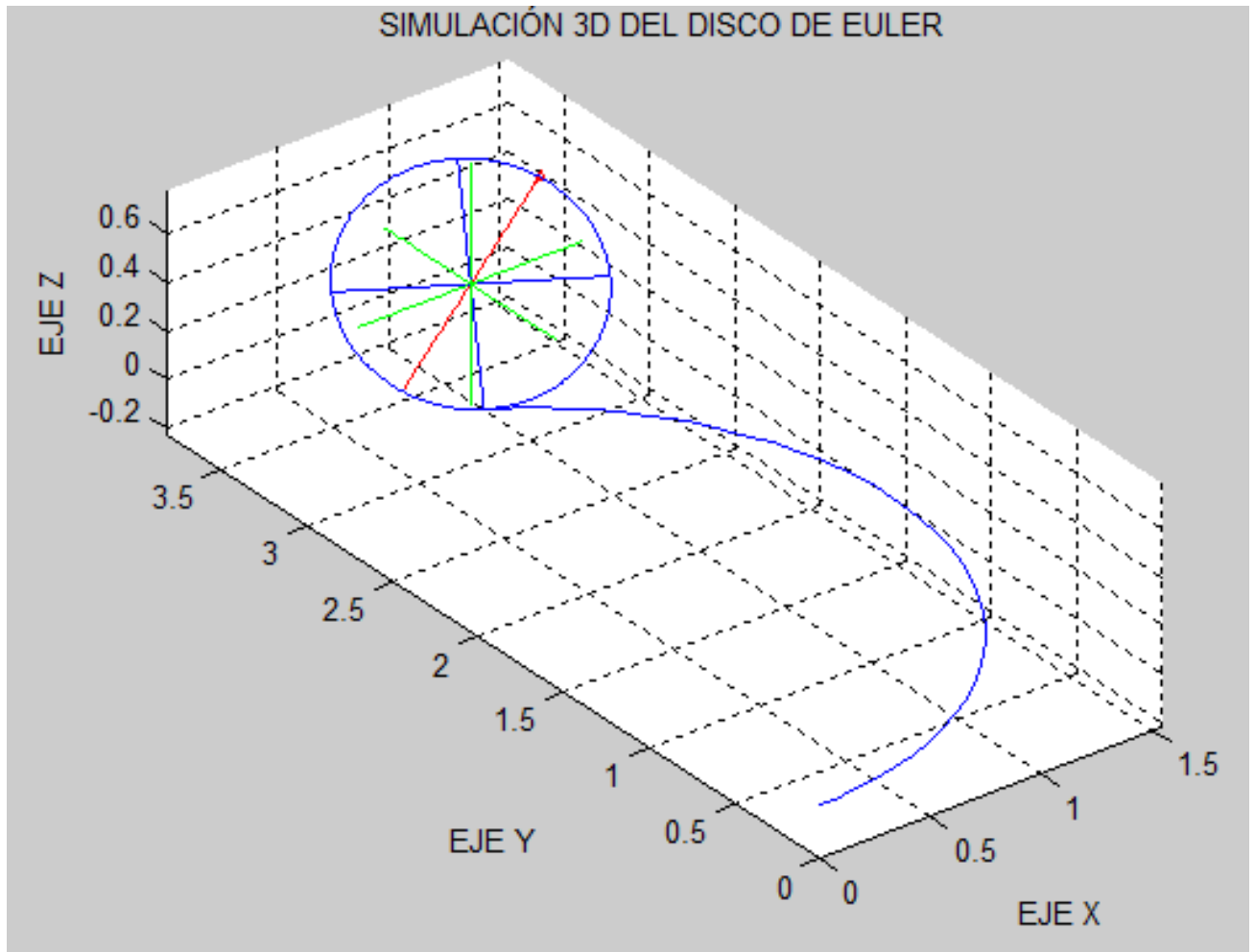


Figura 9.

1.5 Conclusiones del capítulo 1

La función “disco3D” se puede utilizar para cualquiera de los programas creados en el PFC, para la interpretación de la solución del problema físico del disco ideal de Euler, el análisis de la estabilidad o el estudio de los axoides.

Tal y como ya se hizo constar en la Introducción general, este capítulo del TFG se trata de una ampliación del PFC que no incluye nuevos fundamentos físicos. Como hemos podido observar a lo largo del desarrollo del capítulo, se trata de obtener mediante conocimientos de programación de Matlab la simulación 3D de los resultados obtenidos en el PFC usado como base. Sin embargo, esta función creada para la interpretación del disco en el espacio puede ser usada, y se usará, para entender y simular los movimientos del disco bajo los efectos de disipación de energía.

CAPÍTULO 2: DISIPACIÓN DE LA ENERGÍA

2.1 Introducción al capítulo

Es el momento de retomar el estudio físico del disco de Euler. Llegamos al tema central del TFG, el cual, se centra en el análisis de la disipación de energía del disco. Se trata del tema más importante y más interesante del Trabajo Fin de Grado, ya que aborda el estudio del disco de Euler no ideal.

El estudio de la disipación de la energía se realiza mediante la incorporación de dos funciones capaces de modelar la fricción. Como ya se remarcó en la Introducción general, el modelado se realiza mediante la función de disipación de Rayleigh y, por otro lado, mediante la ley de Coulomb.

Al final de cada uno de los análisis individuales de los modelados de la fricción seca realizados, obtendremos las distintas pendientes β de las curvas que se obtienen de representar las velocidades de los ángulos que describen el sistema frente al tiempo, para el rango del ángulo de caída: $3/2 \leq \theta \leq \pi/2$ (intervalo final del movimiento). La obtención de dichas pendientes permite comparar la expresión que relaciona la velocidad con el tiempo para nuestro modelo numérico con las expresiones extraídas de los distintos artículos mencionados en la Introducción general.

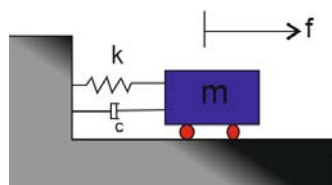
2.2 Modelado de la disipación de la energía

El Proyecto Fin de Carrera del que se parte, “Un estudio ideal del disco de Euler”, es el modelado numérico del problema físico del disco de Euler sin disipación de energía, como ya se ha comentado en más de una ocasión. El hecho de introducir disipación de energía a cualquier problema ideal provoca un cambio radical de la solución del problema, ya que la disipación de energía provoca que el problema ideal pase a ser otro problema totalmente diferente. Se podría decir que existen infinitas formas por las que un sólido rígido es capaz de disipar la energía, pudiendo realizar la disipación por fricción debida al contacto con el soporte, fricción con el aire, fricción interior, ... Como ya se ha expuesto, se estudiará la fricción seca y para el modelado de la disipación se realizará de dos formas diferentes. Uno de ellos es el modelado de la disipación de energía de Rayleigh, éste modela la disipación a través de la multiplicación de un coeficiente por el cuadrado de la velocidad. Sin embargo, el modelado de la ley de Coulomb se obtiene mediante una simple constante de signo contrario al de la velocidad.

2.2.1 El modelado de la función de disipación de Rayleigh

Comenzamos explicando el modelado de la fricción seca mediante la función de disipación de Rayleigh. En el campo del estudio de la mecánica de las vibraciones se modelan los sistemas mediante ecuaciones de movimiento. Cualquier sistema a estudio puede ser simplificado a un sistema masa, muelle y amortiguador mediante la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$



Donde:

- m , es la masa.
- c , es la constante de amortiguamiento.
- k , la constante elástica del muelle.
- f , es la fuerza a la que se encuentra sometida el sistema

En el TFG modelaremos el problema del disco simplificándolo como en el ejemplo anterior, donde se disipará energía mediante un amortiguador. Por ello, se asignará una función de disipación de Rayleigh a cada uno de los ángulos que describen el sistema (φ , θ y ψ). Por lo tanto, se obtiene:

- Función de disipación asignada al ángulo de guiñada: $F_\varphi = \frac{1}{2} h_\varphi \dot{\varphi}^2$
- Función de disipación asignada al ángulo de caída: $F_\theta = \frac{1}{2} h_\theta \dot{\theta}^2$
- Función de disipación asignada al ángulo de rodadura: $F_\psi = \frac{1}{2} h_\psi \dot{\psi}^2$

Por lo que una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento, es posible analizar el efecto de cada una de los distintas funciones variando los valores de las constantes h_φ , h_θ y h_ψ .

2.2.2 El modelado de la ley de Coulomb

Al igual que la función de disipación de Rayleigh, se asigna una función que modela, según la ley de Coulomb, la fricción para cada ángulo. En cambio, este modelado consiste en una ley de Coulomb simplificada en la que trata como constantes las fuerzas de contacto y de signo contrario a la velocidad que lleva el ángulo, se obtienen las funciones:

- Modelado de la ley de Coulomb asignado al ángulo de guiñada: $C_\varphi = -d_\varphi \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}$
- Modelado de la ley de Coulomb asignado al ángulo de caída: $C_\theta = -d_\theta \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$
- Modelado de la ley de Coulomb asignado al ángulo de rodadura: $C_\psi = -d_\psi \frac{\dot{\psi}}{|\dot{\psi}|}$

Siguiendo el mismo procedimiento, variación de constantes, se puede comparar y llegar a obtener un buen análisis de la influencia que posee cada una de las constantes (D_φ , D_θ y D_ψ).

2.3 Obtención de las ecuaciones de movimiento

A continuación, se va a demostrar la obtención de las ecuaciones de movimiento. Previamente será necesario conocer el estado cinemático del disco y su distribución de masas, posteriormente habrá que calcular la energía cinética y potencial para que aplicando las ecuaciones de Lagrange obtengamos las ecuaciones de movimiento del sistema.

2.3.1 Estado cinemático del disco de Euler

Para hallar la energía cinética (T) del disco de Euler es necesario deducir su estado cinemático $\{\vec{v}_{disco}^G, \vec{\omega}_{disco}\}$. Conocer el estado cinemático consiste en la obtención de la velocidad de traslación del centro de gravedad y de la velocidad angular del disco.

Velocidad de traslación del disco, esta velocidad se obtiene de derivar respecto al tiempo la posición del centro de gravedad. La posición del centro de gravedad ya fue obtenida en el apartado 1.4 del capítulo 1.

$$r_x^G = x_c + R_{DISCO} \sin \varphi \sin \theta$$

$$r_y^G = y_c - R_{DISCO} \cos \varphi \sin \theta$$

$$r_z^G = R_{DISCO} \cos \theta$$

Si se derivan estas ecuaciones respecto al tiempo se obtiene la velocidad de traslación del centro de gravedad.

$$v_x^G = \frac{d(r_x^G)}{dt} = \dot{x}_c + R_{DISCO}(\cos \varphi \sin \theta)\dot{\varphi} + R_{DISCO}(\sin \varphi \cos \theta)\dot{\theta}$$

$$v_y^G = \frac{d(r_y^G)}{dt} = \dot{y}_c + R_{DISCO}(\sin \varphi \sin \theta)\dot{\varphi} - R_{DISCO}(\cos \varphi \cos \theta)\dot{\theta}$$

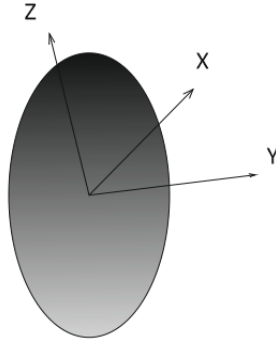
$$v_z^G = \frac{d(r_z^G)}{dt} = -R_{DISCO}(\sin \theta)\dot{\theta}$$

Una vez hemos obtenido la velocidad de traslación, se deduce la velocidad angular del disco. Se obtendrá de multiplicar la velocidad angular correspondiente a cada uno de los ángulos que detallan los giros del disco por los vectores correspondientes a los ejes de referencia que describen dichos giros.

$$\vec{\omega}_{disco} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

2.3.2 Distribución de masas

La masa del disco ya quedó definida en la introducción del TFG, $m_{\text{disco}}=1$ kg. Además, hay que definir la matriz de inercia del disco:



$$\vec{I}_G = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} m_{\text{disco}} R_{\text{disco}}^2$$

2.3.3 Cálculo de la energía cinética y potencial del disco

Conocido el estado cinemático y la distribución de masas del disco, es posible calcular la energía cinética del mismo mediante la ecuación:

$$T = T_{TRAS} + T_{ROT}$$

$$T_{TRAS} = \frac{1}{2} m_{\text{disco}} |\vec{v}_{\text{disco}}^G|^2$$

$$T_{ROT} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{\text{disco}} \vec{I}_G \vec{\omega}_{\text{disco}}$$

Desarrollando cada división de la energía cinética se obtiene:

$$T_{TRAS} = \frac{1}{2} m [\dot{x}_c^2 + 2\dot{x}_c(\dot{\varphi} \cos\varphi \sin\theta + \dot{\theta} \sin\varphi \cos\theta) + \dot{y}_c^2 + 2\dot{y}_c(\dot{\varphi} \sin\varphi \sin\theta - \dot{\theta} \cos\varphi \cos\theta) + \dot{\varphi}^2(\cos^2\varphi \sin^2\theta + \sin^2\varphi \sin^2\theta) + \dot{\theta}^2(\sin^2\varphi \cos^2\theta + \cos^2\varphi \cos^2\theta + \sin^2\theta)]$$

Antes de continuar con la energía cinética de rotación, se demuestra que \dot{x}_c tanto como \dot{y}_c se pueden escribir en función de los ángulos que describen el sistema y las velocidades de los mismos.

En el punto C del disco se cumple en todo momento la condición de rodar sin deslizar, es decir, $\vec{v}_{\text{disco}}^C = 0$, por lo que desarrollándolo se obtiene:

$$\dot{x}_c = -R\dot{\psi} \cos\varphi$$

$$\dot{y}_c = -R\dot{\psi} \sin\varphi$$

Ahora, podemos continuar con la obtención de la energía de rotación:

$$T_{ROT} = \frac{1}{4} m R^2 \left[\frac{1}{2} (\dot{\theta} \cos\varphi - \dot{\psi} \sin\varphi \cos\theta)^2 + (\dot{\theta} \sin\varphi - \dot{\psi} \cos\varphi \cos\theta)^2 + \frac{1}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\varphi)^2 \right]$$

Continuamos con el cálculo de la energía potencial. Se obtiene aplicando: $V = mg\Delta h$

Donde: $\Delta h = R\cos\theta$. Por lo que se obtiene:

$$V = mgR\cos\theta$$

2.3.4 Aplicación de la ecuación de Lagrange

El último paso para obtener las ecuaciones de movimiento del sistema es aplicar la ecuación de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial F_q}{\partial \dot{q}} = Q_q \quad q = \{\varphi, \theta, \psi\}$$

Donde la Lagrangiana se halla aplicando: $\mathcal{L} = T - V$

Nótese como en este caso, la fricción pasa a participar en las ecuaciones de movimiento. La fricción juega su papel mediante la función de disipación de Rayleigh y, por otra parte, al sustituir la fuerza generalizada por la expresión que se muestra a continuación.

$$Q_\varphi = -d_\varphi \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}; \quad -d_\theta \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}; \quad Q_\psi = -d_\psi \frac{\dot{\psi}}{|\dot{\psi}|}$$

Esta última sustitución se debe a que podemos considerar el modelado de la fricción de Coulomb como una fuerza de signo contrario a la velocidad y de valor constante, el cual se puede variar para el análisis de su efecto.

Finalmente, desarrollando las ecuaciones y su conveniente adimensionalización se llega al resultado de las tres ecuaciones de movimiento que definen el problema:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{\cos\theta} \dot{\psi}\dot{\theta} - H_\varphi \dot{\varphi} - D_\varphi \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{4}{3} \dot{\varphi}\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta + \frac{2}{3} \sin\theta - H_\theta \dot{\theta} - D_\theta \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\psi}\dot{\theta} \tan\theta - \frac{3}{2} \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos\theta - H_\psi \dot{\psi} - D_\psi \frac{\dot{\psi}}{|\dot{\psi}|}$$

Recordar que las ecuaciones que imponía la restricción de rodar sin deslizar quedan adimensionalizadas como:

$$\dot{x}_c = -\dot{\psi} \cos\varphi$$

$$\dot{y}_c = -\dot{\psi} \sin\varphi$$

Cabe destacar el cambio de nomenclatura de las constantes relacionadas con la disipación de energía en ambos modelados. El cambio, generalizado, de h_q por H_q y d_q por D_q se debe a que al tratar las ecuaciones no estaríamos hablando de las mismas constantes definidas en un principio. Sin embargo, este tratamiento de las constantes no nos afecta debido a que para analizar la disipación de energía iremos variando las constantes manualmente.

2.4 Programación Matlab del modelo numérico

La programación de Matlab para realizar el análisis de la fricción consistirá en un programa principal en el que se resuelven las ecuaciones de movimiento para unas condiciones iniciales dadas, y posteriormente se interpretan una serie de gráficas que nos permiten estudiar el efecto de la disipación de energía.

2.4.1 El programa general

El programa principal se denomina “AnálisisFriccion” (Anexo 4). Consiste, primeramente, en la definición de las condiciones iniciales correspondientes a los ángulos que describen el problema y las derivadas de éstos. A continuación, se resuelve el problema gracias a la función de Matlab “ode45” y a la definición de la función “ecuacionesfricción”.

El resultado obtenido se almacena en la matriz “y”. Dicha matriz, al igual que el programa general que resolvía el problema ideal, almacena los valores para cada uno de los instantes de tiempo resuelto de los ángulos ϕ , θ y ψ , sus derivadas respecto al tiempo y los valores de x_c y y_c .

A continuación, el programa general realiza un post-procesado de los resultados. Este post-proceso consiste en representar gráficamente la trayectoria del centro de gravedad del disco de Euler en el espacio y las evoluciones del ángulo de caída, θ , y de la componente r_z^G del centro de gravedad frente al tiempo.

2.4.2 Función “ecuacionesfricción”

El archivo “ecuacionesfricción” (Anexo 5) consiste en una función de Matlab que implementa las ecuaciones de movimiento del sistema a estudio. Gracias a esta función y a la función “ode45” podemos obtener los resultados del problema del disco de Euler no ideal.

Como ya se hizo constar en el apartado 0.6 de la Introducción general, es necesario realizar un cambio de variables para poder trabajar con la función “ode45”. Las ecuaciones de movimiento que se han desarrollado forman un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado, por lo que es necesario un cambio de variables que dé como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Realizando el mismo procedimiento del apartado 0.6, se demuestra el cambio:

$$y_1 = \phi \quad y_4 = \dot{\phi}$$

$$y_2 = \theta \quad y_5 = \dot{\theta}$$

$$y_3 = \psi \quad y_6 = \dot{\psi}$$

Por lo que se tiene:

$$\dot{y}_1 = \dot{\phi} = y_4$$

$$\dot{y}_2 = \dot{\theta} = y_5$$

$$\dot{y}_3 = \dot{\psi} = y_6$$

Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento recién obtenidas:

$$\dot{y}_4 = \dot{\varphi} = -\frac{2}{\cos y_2} y_6 y_5 - H_\varphi y_4 - D_\varphi \frac{y_4}{|y_4|}$$

$$\dot{y}_5 = \dot{\theta} = \frac{4}{3} y_4 y_6 \cos y_2 + y_4^2 \sin y_2 \cos y_2 + \frac{2}{3} \sin y_2 - H_\theta y_5 - D_\theta \frac{y_5}{|y_5|}$$

$$\dot{y}_6 = \dot{\psi} = y_5 y_6 \tan y_2 - \frac{3}{2} y_4 y_5 \cos y_2 - H_\psi y_6 - D_\psi \frac{y_6}{|y_6|}$$

2.4.3 Programas de post-procesado

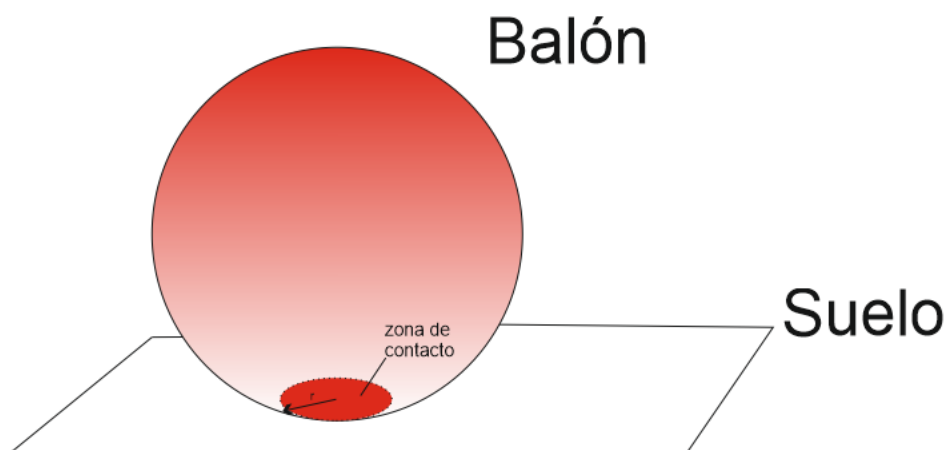
Una vez obtenida la solución del sistema es interesante la realización de un procesado de los datos que nos permita analizar la disipación de energía. Para ello, contamos con la creación de dos programas.

El programa “PostProcesado1” (Anexo 6) consiste en un programa que carga todos los datos obtenidos de las distintas soluciones existentes de variar los coeficientes. A continuación, el programa extrae gráficas que comparan las evoluciones del centro de gravedad y del ángulo de caída para los distintos resultados.

Por otro lado, el programa “PostProcesado2” (Anexo 7) se encarga de extraer la evolución de las velocidades asignadas a los ángulos. Representa el logaritmo neperiano de las velocidades frente al logaritmo de la diferencia entre el tiempo final y la variable tiempo. Mediante el cálculo de una recta de regresión permite obtener el valor de la pendiente.

2.5 La resistencia al pivotamiento, rodadura y vuelco

La asignación de un valor concreto a los distintos coeficientes H_q o D_q tiene su explicación. Para ello, imaginemos un balón de fútbol, la zona de contacto entre el suelo y el balón se puede representar mediante un círculo de radio r como el de la figura. Si el balón se encuentra más inflado la zona de contacto entre el suelo y el balón es menor, por lo que el valor de r es pequeño. Una menor zona de contacto implica menor disipación de energía, luego se asigna un valor pequeño a los coeficientes H_q o D_q . Por otro lado, si el balón estuviese poco inflado, el radio del círculo de contacto sería mayor y, por tanto, se asigna un valor alto a los coeficientes debido a la existencia de mayor zona de fricción.



Esta explicación puede extrapolarse al caso del disco de Euler. Suponiendo que valores altos de los coeficientes implican un disco poco rígido, mientras que valores bajos de los coeficientes implican una menor zona de contacto entre el plano X-Y y el disco.

2.6 Análisis de la función de disipación de Rayleigh

Este apartado parte de la solución de las ecuaciones de movimiento con los términos de la función de disipación de Rayleigh implementados:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{\cos \theta} \psi \dot{\theta} - H_{\varphi} \dot{\varphi}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{4}{3} \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta - H_{\theta} \dot{\theta}$$

$$\ddot{\psi} = \psi \dot{\theta} \tan \theta - \frac{3}{2} \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta - H_{\psi} \dot{\psi}$$

La metodología a seguir será analizar cada una de las funciones de disipación asignadas a los ángulos (F_{φ} , F_{θ} y F_{ψ}) por separado mediante la variando los coeficientes H_{φ} , H_{θ} y H_{ψ} asignados a cada una de las funciones. Dar valores nulos a dos de los coeficientes y un valor fijo al coeficiente restante permite dicho análisis por separado. Finalmente, se podrá llegar a la conclusión de qué función de disipación asignada a cada ángulo es más crítica y si existe concordancia del modelo numérico creado con las expresiones obtenidas por Moffatt [1] y Leine [3] mediante el análisis de los valores de las pendientes β .

2.6.1 Análisis de la función de disipación asignada al ángulo de caída

En este apartado, comprobaremos cómo el efecto sobre la fricción que tiene la función de Rayleigh asignada al ángulo de caída (F_{θ}) es mínimo. Para ello, se representa la variación del ángulo de caída y de la altura del centro de gravedad frente al tiempo para distintos coeficientes H_{θ} .

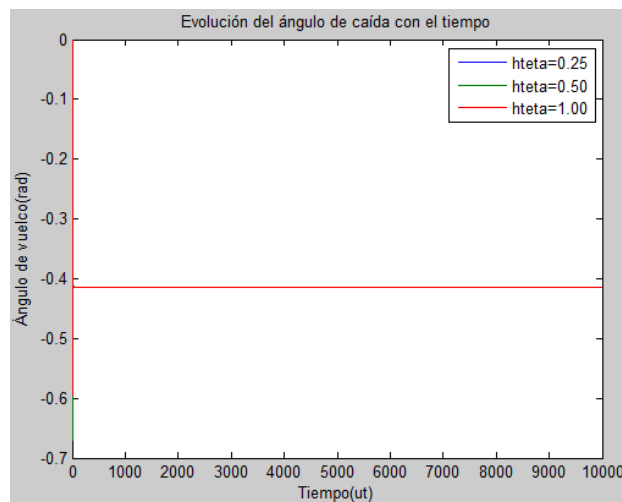


Figura 10.

En la figura 10, se observa cómo tras un breve rango de tiempo el ángulo de caída se fija en el valor -0,42 radianes. Por lo que la disipación de energía se hace inexistente, ya que el valor del ángulo de caída se ha hecho fijo en un ángulo concreto y el disco no ha tendido a colocarse en horizontal ($\theta=\pi/2$ radianes). Luego se razona que el efecto que tiene la función asignada al ángulo de caída sobre la disipación de energía es mínimo.

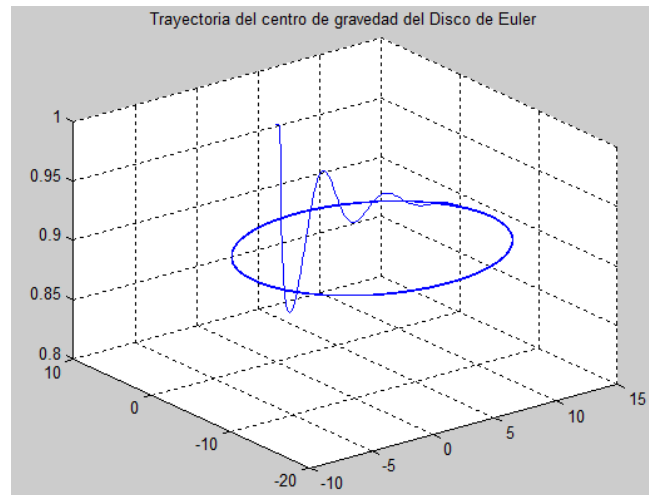


Figura 11.

Representando la trayectoria del centro de gravedad del disco (figura 11) para un coeficiente $H_\theta=1,05$, se puede concluir lo comentado con anterioridad, es decir, al pasar un breve intervalo de tiempo, el disco queda estabilizado en una trayectoria y su disipación de energía se hace cero.

Finalmente, se llega a la siguiente conclusión: **el efecto de la función de disipación de Rayleigh F_θ sobre la disipación de energía es despreciable**, tal y como se dijo en el inicio de apartado.

2.6.2 Análisis de la función de disipación asignada al ángulo de guiñada

Para estudiar el efecto de la función F_φ sobre la disipación de energía se analizará las evoluciones con el tiempo del ángulo de caída, θ , y de la componente r_z^G . Observando dichas figuras y estudiando las pendientes resultantes de enfrentar las velocidades de los ángulos frente al logaritmo del tiempo para el rango $3/2 \leq \theta \leq \pi/2$, podemos obtener conclusiones sobre el efecto de la función F_φ .

Cabe destacar que analizaremos brevemente si la variación de las condiciones iniciales tiene un efecto considerable sobre la disipación de energía. Para este apartado se resolverá el problema para condiciones iniciales de estacionarias y no estacionarias, explicadas en el apartado 0.6.3.

2.6.2.a-Análisis de la variación de H_φ y la variación de las condiciones iniciales:

- Variación de los coeficientes H_φ :

Este estudio trata de resolver el problema no ideal para distintos valores de H_φ con unas mismas condiciones iniciales y, a continuación, fijando H_φ y variar las condiciones iniciales. Se expondrá los efectos que se observan en las evoluciones del ángulo de caída y de la componente r_z^G .

Comenzamos con el análisis de la variación del H_φ . Las condiciones iniciales del problema son aquellas que dan como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales estacionario.

$$[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; 1, 0, -1.41]$$

Los valores de H_ϕ varían según la tabla:

	Solución 1	Solución 2	Solución 3	Solución 4	Solución 5
H_ϕ	0,01	0,03	0,10	0,30	1,00

Como resultado obtenemos el desarrollo del centro de gravedad del disco en la siguiente figura.

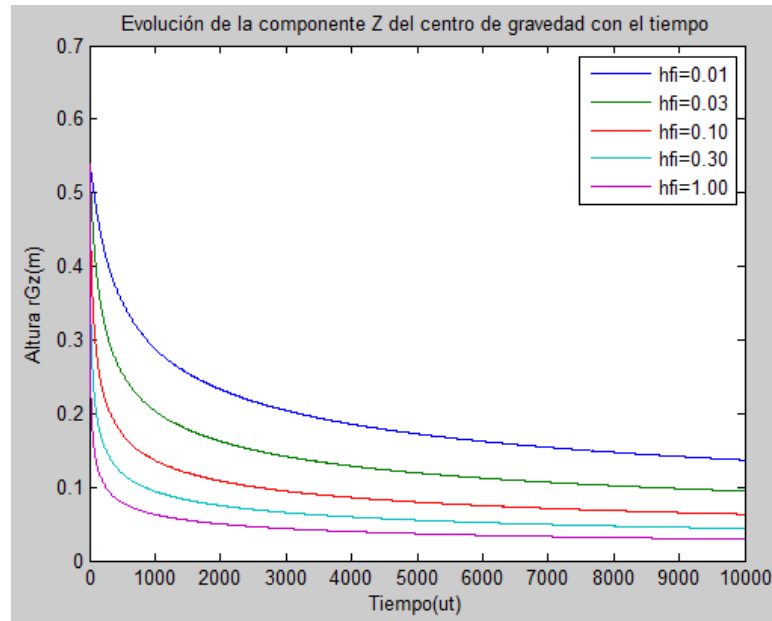


Figura 12.

En esta figura, llama la atención la gran diferencia de valores de r_z^G entre las evoluciones del centro de gravedad para $H_\phi=0,01$ y $H_\phi=0,10$. Sin embargo, no existe tan alta diferencia entre los desarrollos para $H_\phi=0,10$ y $H_\phi=1,00$. Por lo que la evolución de los valores de r_z^G con respecto al tiempo se hace similar para valores del coeficiente H_ϕ altos, alrededor de 1,00. A valores altos de H_ϕ el disco tiende a una cota cercana a 0 metros, pero no exacta.

A parte, con esta representación se puede percibir como el disco disipa una mayor cantidad de energía en los primeros instantes de tiempo, ya que se observa una gran variación de la altura del centro de gravedad del disco en el rango de tiempo de 0 a 500 ut. Por contra, a medida que el tiempo avanza, la velocidad con la que el disco disipa energía se hace más lenta porque la variación de altura es mucho menor para un rango de tiempo más elevado.

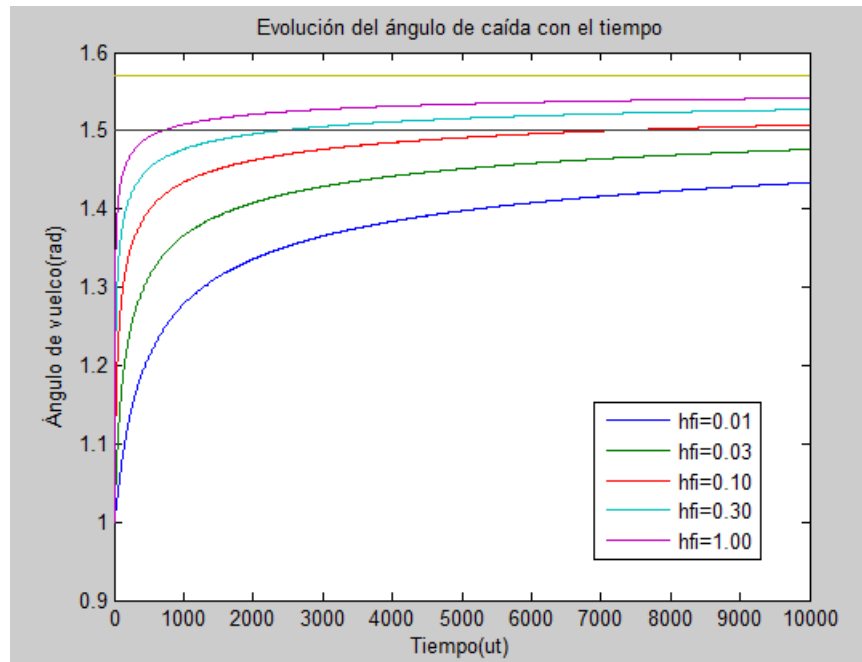


Figura 13.

En la representación de la evolución del ángulo de caída del disco frente al tiempo se contemplan los dos efectos observados en el desarrollo de la altura del disco. A parte, podemos observar dos líneas rectas correspondientes al rango 1,5 radianes y $\pi/2$ radianes. Para valores del coeficiente H_ϕ cercanos a 1,00 vemos como se cumple que la variación del ángulo de caída se hace similar. Además, si aumentásemos el valor del coeficiente, observaríamos que la caída tiende al valor $\pi/2$, pero sin alcanzarlo, tal y como había concluido en la observación de la variación de altura.

Por otro lado, se ratifica que la disipación de energía es más elevada al principio, ya que se observa como la variación del ángulo de caída es más elevada en el rango de tiempo de 0 a 500 ut frente al intervalo que va de 500 a 10000 ut. Luego conforme el ángulo de caída θ tiende a $\pi/2$ radianes, la disipación de energía se ralentiza, efecto ya observado.

Por último, se concluye que el aumento del coeficiente H_ϕ nunca provoca la caída final del disco, luego se demuestra que **el efecto de la función de disipación de Rayleigh F_ϕ sobre el disco no es crítico**. Es observable que la altura del disco tiende a cero y su ángulo de caída a $\pi/2$, pero nunca alcanzan estos valores en un intervalo de tiempo razonable.

- Variación de las condiciones iniciales:

Se acaba de analizar el efecto que supone variar el coeficiente H_ϕ bajo condiciones iniciales estacionarias. A continuación, resulta interesante estudiar cómo afecta la variación de un sistema de ecuaciones diferenciales estacionarias a otro sistema de ecuaciones no estacionarias a la disipación de energía.

La metodología consiste en resolver el problema para dos condiciones iniciales no estacionarias con el coeficiente H_ϕ fijado para el valor 1,00. Comparando las evoluciones de la altura del centro de gravedad y el ángulo de caída para condiciones iniciales estacionarias con las no estacionarias se podrá determinar el efecto que causan sobre el disco.

Las condiciones iniciales que estudiaremos serán:

- Estacionarias: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; 1, 0, -1.41]$
- No estacionarias 1: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; -1, 0, 1]$
- No estacionarias 2: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; -0.5, 0, 1]$

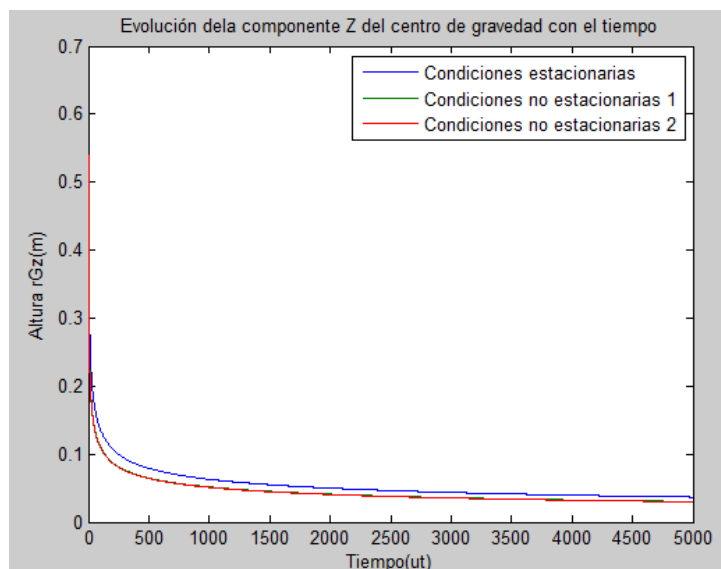


Figura 14.

En la figura 14, desarrollo de la componente r_z^G , se puede percibir como la disipación de energía bajo condiciones iniciales no estacionarias sigue el mismo desarrollo. Por otro lado, la disipación de energía es menor bajo condiciones estacionarias, ya que se observa como la variación de altura del disco es menor frente a la variación para condiciones no estacionarias.

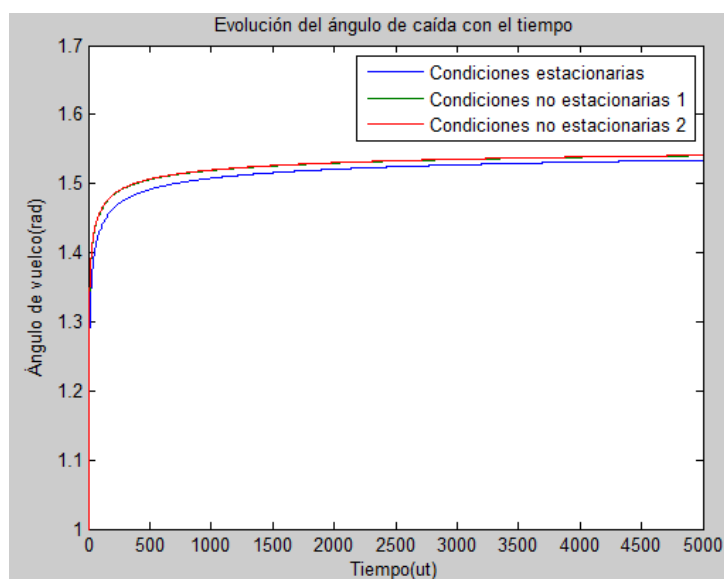


Figura 15.

Representando la evolución del ángulo de caída a lo largo del tiempo, se visualiza y confirma que para condiciones no estacionarias la disipación de energía es la misma. Además, se vuelve a observar como la disipación de energía es menor para sistemas de ecuaciones diferenciales estacionarias.

Finalmente, se corroboran los comportamientos del disco de Euler comentados en las figuras 12 y 13, mayor disipación de energía en los primeros instantes de tiempo y la tendencia de la altura y el ángulo de caída hacia valores de 0 metros y $\pi/2$ radianes respectivamente, pero sin alcanzarlos.

2.6.2.b-Análisis de las pendientes β de las velocidades:

En la Introducción general del TFG se habló de los interesantes trabajos realizados por Moffatt [1] y Leine [3]. El matemático escocés y el ingeniero conseguían deducir una relación entre la velocidad y la diferencia entre el tiempo final y la variable tiempo, dicha relación dependía de una pendiente β . La pendiente de Moffatt [1] toma el valor $-1/6$, mientras que la pendiente de Leine [3] toma el valor $-1/2$ o $-2/3$, en función de la diferencia entre tiempos.

Obtenidas los valores de las velocidades, el análisis consiste en extraer la pendiente β de cada una de las rectas de regresión que se obtienen de analizar las velocidades $\dot{\varphi}$ y $\dot{\psi}$ para el rango de ángulo de caída comprendido entre $1,5$ radianes y $\pi/2$ radianes. De forma que podamos aproximar las velocidades mediante las ecuaciones:

$$\ln(\dot{\varphi}) \sim \beta_{\varphi} \ln(t_0 - t) + N_{\varphi}$$

$$\ln(\dot{\theta}) \sim \beta_{\theta} \ln(t_0 - t) + N_{\theta}$$

$$\ln(\dot{\psi}) \sim \beta_{\psi} \ln(t_0 - t) + N_{\psi}$$

Obtenido el valor de la pendiente β_q podemos compararlo con los resultados de Moffatt [1] y Leine [3]. En la literatura existen diferentes artículos que dan otros valores a estas pendientes, pero se ha decidido tomar de referencia estos dos trabajos.

Realizamos dicho análisis para los coeficientes H_{φ} de valor $0,30$ y $1,00$, tal y como se observa en la figura 13 son los únicos coeficientes que producen que el disco alcance valores del ángulo de caída comprendidos en el intervalo de $1,5$ radianes a $\pi/2$ radianes.

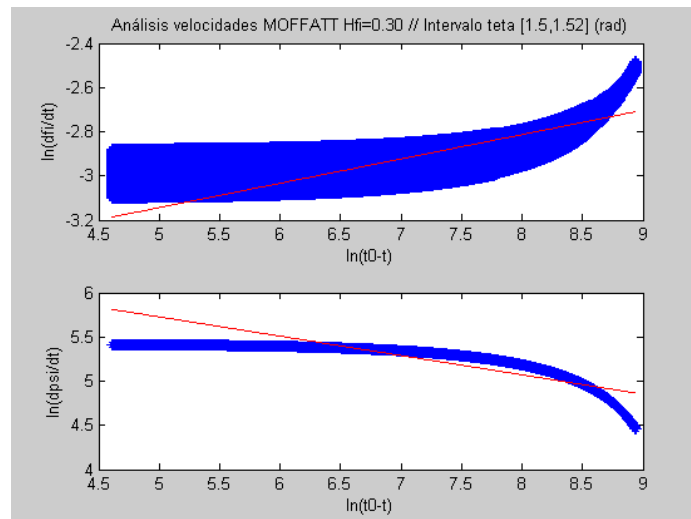


Figura 16.

$H_{\varphi}=0,30$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\varphi}$	[2375,9900]	[1,5 , 1,52]	0,1101	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[2375,9900]	[1,5 , 1,52]	-0,2188	-1/6	-1/2,-2/3

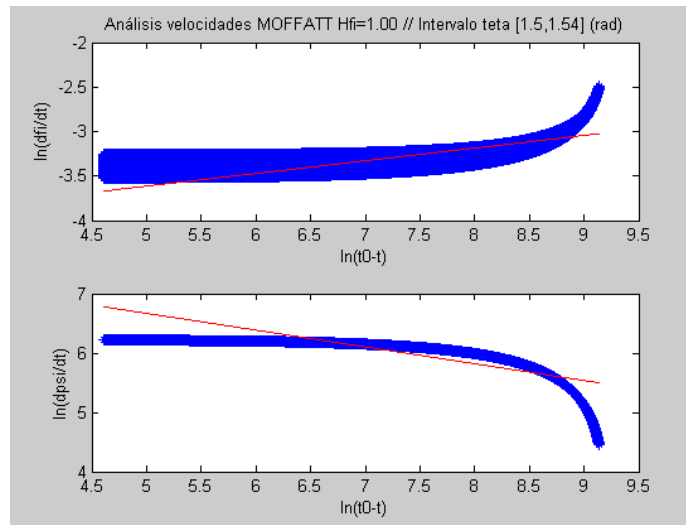


Figura 17.

$H_\varphi=1,00$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\varphi}$	[706,9900]	[1,5 , 1,54]	0,1425	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[706,9900]	[1,5 , 1,54]	-0,2828	-1/6	-1/2,-2/3

Podemos observar como en esta ocasión el valor de la pendiente β_ψ para el coeficiente 0,30 y para el coeficiente 1,00 es del orden del valor de las pendientes de Moffatt [1] y Leine [3].

2.6.3 Análisis de la función de disipación asignada al ángulo de rotación propia

En este apartado, siguiendo el mismo procedimiento del anterior, se trata de llegar a la conclusión del efecto que produce la función F_ψ sobre el disco de Euler y el valor de las pendientes β_q .

El apartado se inicia estudiando el efecto que conlleva variar el coeficiente H_ψ sobre la solución del problema para unas condiciones iniciales fijadas. Y, a continuación, se analiza la variación de las condiciones iniciales del problema para un coeficiente H_ψ concreto. Por último analizaremos las velocidades.

2.6.3.a-Análisis de la variación de H_ψ y la variación de las condiciones iniciales:

- Variación de los coeficientes H_ψ :

Comenzamos este apartado secundario fijando las condiciones iniciales que provocan la obtención de un sistema de ecuaciones diferenciales estacionario. Se varía el coeficiente H_ψ de la siguiente forma:

	Solución 1	Solución 2	Solución 3	Solución 4	Solución 5	Solución 6	Solución 7
H_ψ	0,001	0,003	0,01	0,03	0,10	0,30	1,00

En esta ocasión es interesante analizar el efecto que supone asignar al coeficiente valores de la milésima o la tres milésimas. Recurriendo a la explicación del apartado 2.5, estos valores implican un disco muy rígido, cuya zona de contacto con el plano X-Y es pequeña.

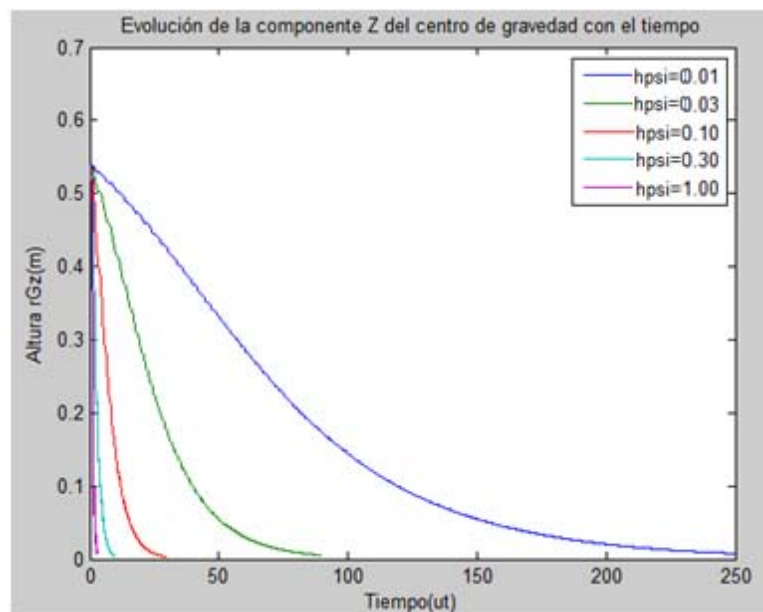


Figura 18.

En la figura 18 se representa la evolución de la componente r_z^G del disco con el tiempo para los coeficientes comprendidos entre 0,01 y 1,00. Se contempla como la altura del centro de gravedad del disco desciende realizando pequeñas oscilaciones. Dichas oscilaciones son consecuencias de lo que podríamos llamar “transferencias” de energía entre los ángulos que describen el disco.

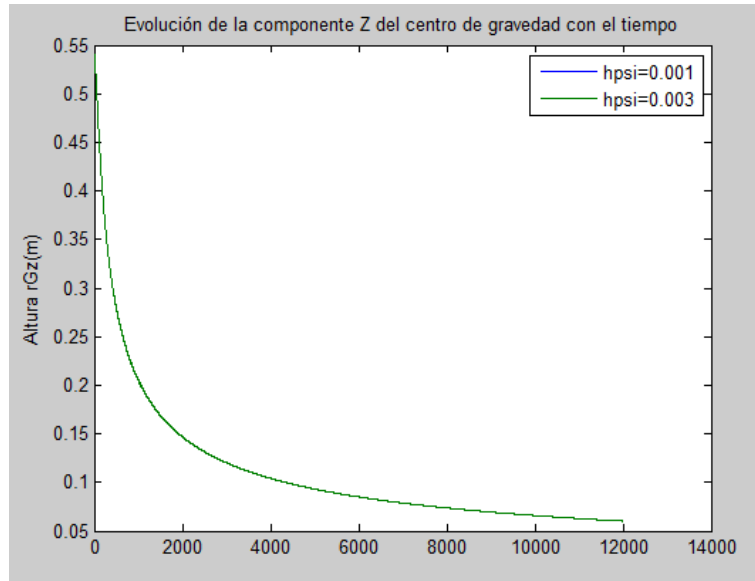


Figura 19.

Para una mejor observación de las evoluciones, en la figura 19, se representa el desarrollo del centro de gravedad para los coeficientes 0,001 y 0,003. Observamos los mismos efectos de la figura 18, pero en esta ocasión las oscilaciones son mínimas. Llama la atención que para ambos valores el disco sigue la misma evolución.

De ambas gráficas, se deduce que el aumento del coeficiente H_ψ hace que el disco descienda con mayor velocidad, como es lógico. Se debe a una mayor disipación de energía en menor tiempo. Además, al igual que ocurría en el ángulo de guiñada, existe una mayor disipación de energía en los primeros instantes de tiempo. Se percibe una mayor disminución de la altura del centro de gravedad al inicio para un rango de tiempo inferior.

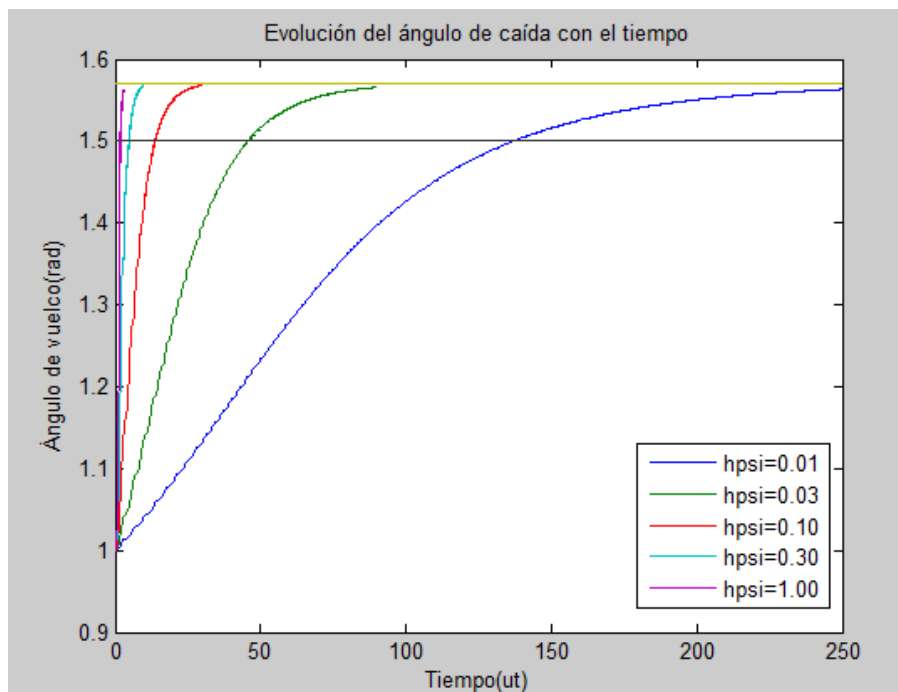


Figura 20.

Representando el desarrollo del ángulo de caída con el tiempo se confirma lo efectos observados en la evolución del centro de gravedad. Es decir, el disco cae realizando pequeñas oscilaciones. Por otro lado, el aumento del coeficiente hace que el disco llegue al suelo en menor tiempo. Por último, se observa la mayor disipación de energía en el primer intervalo de tiempo.

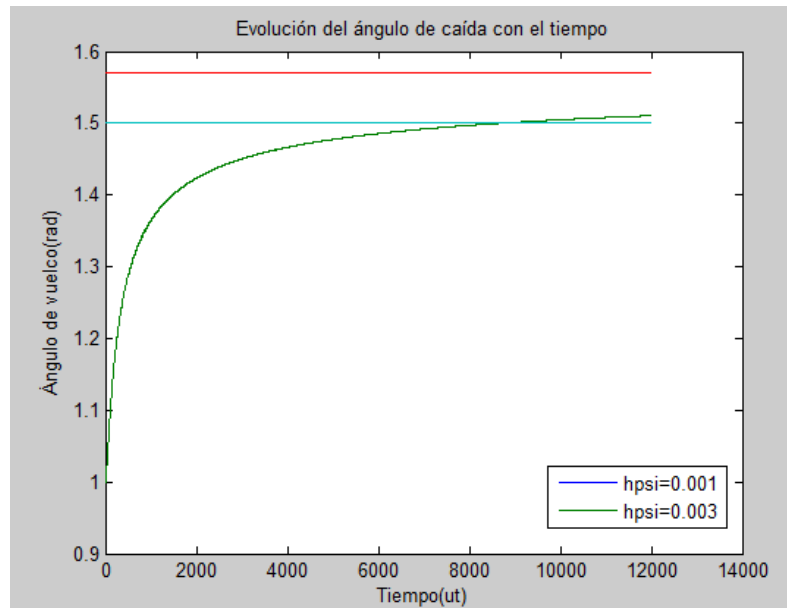


Figura 21.

Volviendo a representar por separado el valor del coeficiente H_ψ valores de la milésima o la tres milésimas, se vuelve a observar que la evolución con el tiempo en ambos casos toman los mismos valores. Y, además, las oscilaciones son menores.

Para finalizar este análisis, se comprueba gráficamente que la función F_ψ es el más importante de los tres. La disipación que produce el coeficiente H_ψ hace que el disco termine finalmente cayendo al suelo, ya que la altura del centro de gravedad acaba siempre alcanzando el valor 0 metros para intervalos de tiempo razonables. De igual manera, el ángulo de caída acaba tomando el valor $\pi/2$ radianes. Dicho esto, se ratifica que el disco se encuentra en el suelo y parado. Se determina que **el efecto de la función de disipación de Rayleigh F_ψ sobre el disco es crítico.**

- Variación de las condiciones iniciales:

Continuando con el análisis de la función F_ψ , se estudia el efecto que provoca la variación de las condiciones iniciales para un coeficiente H_ψ de valor 1,00. La resolución del problema se realiza con las mismas variaciones de condiciones iniciales del anterior:

- Estacionarias: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; 1, 0, -1.41]$
- No estacionarias 1: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; -1, 0, 1]$
- No estacionarias 2: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; -0.5, 0, 1]$

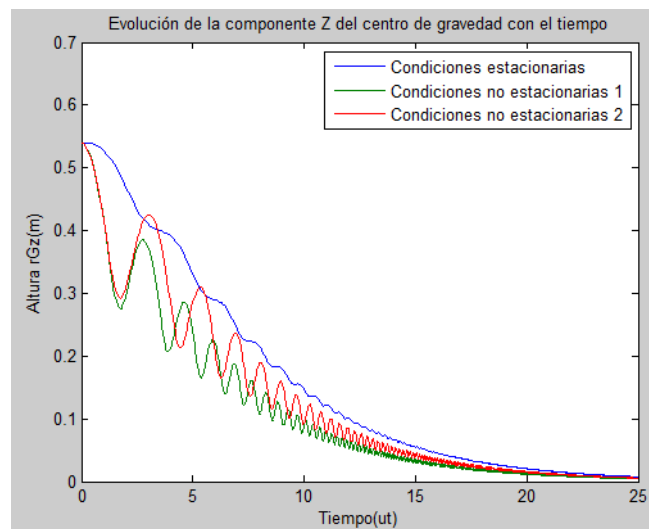


Figura 22.

En la figura 22 se identifica, al igual que el apartado 2.6.2.a, que para condiciones iniciales estacionarias se disipa menor cantidad de energía, pero en este caso la diferencia existente es menor. A diferencia de la función F_ϕ , la disipación de energía para condiciones no estacionarias no sigue la misma evolución.

Es interesante volver a observar que el descenso del disco se produce realizando oscilaciones. Las oscilaciones reducen su amplitud, pero aumentan su frecuencia a medida que se acercan a la cota 0.

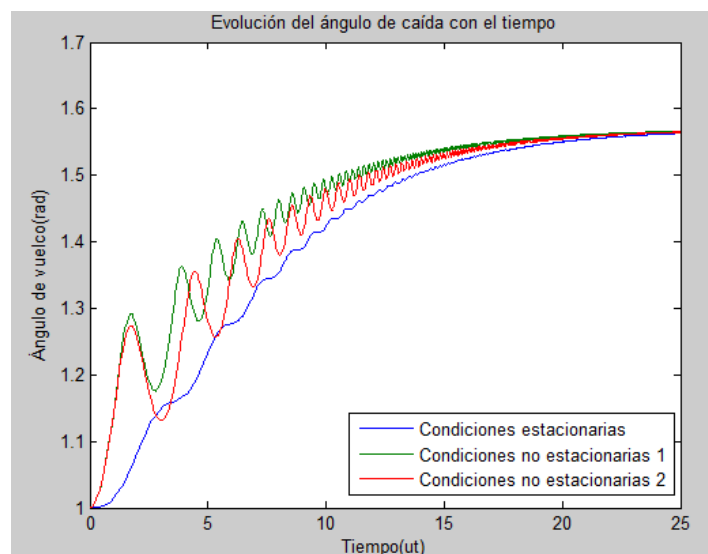


Figura 23.

En el desarrollo del ángulo de caída se confirma lo observado en la figura 22: existe diferencia de disipación de energía entre condiciones estacionarias y no estacionarias, pero en este caso la diferencia es menor.

2.6.3.b- Análisis de las pendientes β de las velocidades:

Tras analizar los efectos sobre el disco, es momento de estudiar las pendientes de las velocidades para los distintos coeficientes H_ψ . Siguiendo el mismo proceso del apartado 2.6.2.b, extraemos el valor de las pendientes β y los comparamos con los valores de Moffatt [1] y Leine [3].

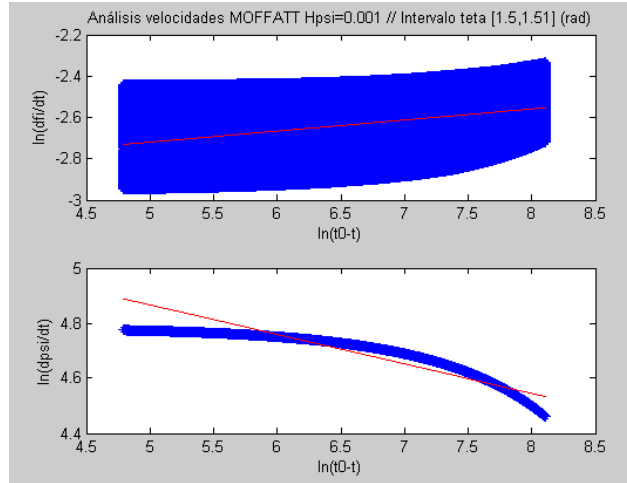


Figura 23.

$H_\psi=0,001$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\varphi}$	[8700,11900]	[1,5 , 1,51]	0,0535	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[8700,11900]	[1,5 , 1,51]	-0,1070	-1/6	-1/2,-2/3

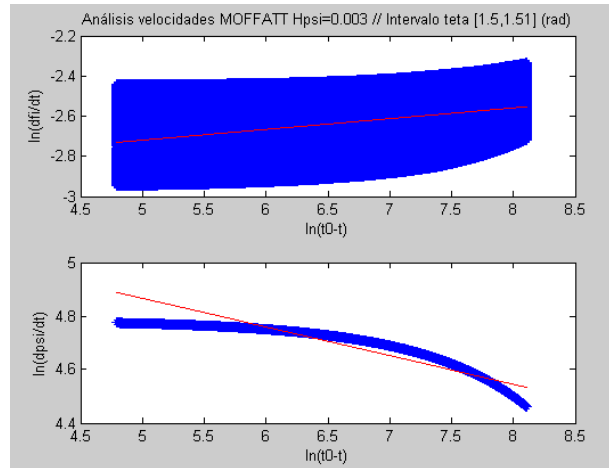


Figura 24.

$H_\psi=0,003$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[8700,11900]	[1,5 , 1,51]	0,0535	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[8700,11900]	[1,5 , 1,51]	-0,1070	-1/6	-1/2,-2/3

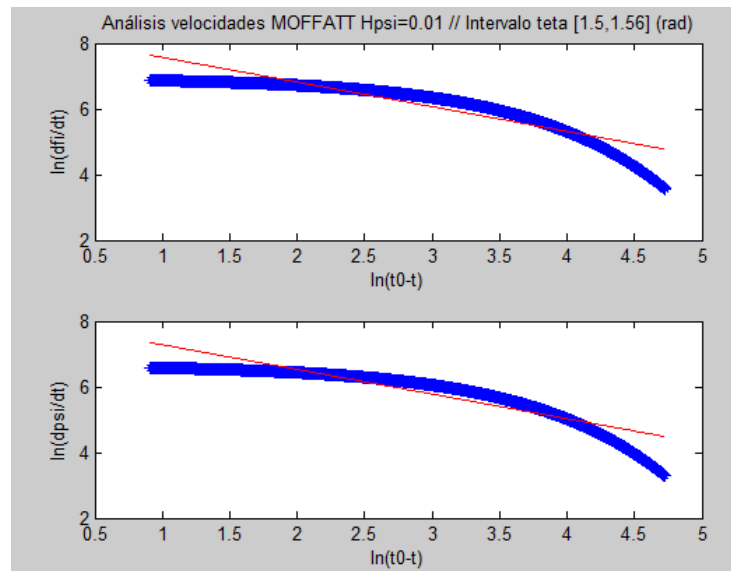


Figura 25.

$H_\psi=0,01$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[138,250]	[1,5 , 1,56]	-0,7511	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[138,250]	[1,5 , 1,56]	-0,7507	-1/6	-1/2,-2/3

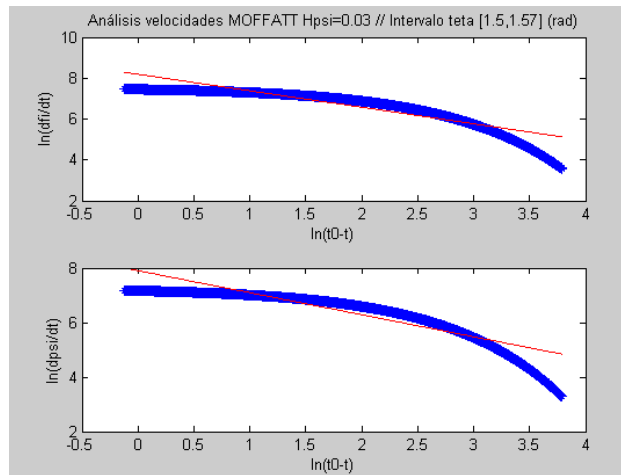


Figura 26.

$H_\psi=0,03$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[46,89]	[1,5 , 1,57]	-0,8088	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[46,89]	[1,5 , 1,57]	-0,8086	-1/6	-1/2,-2/3

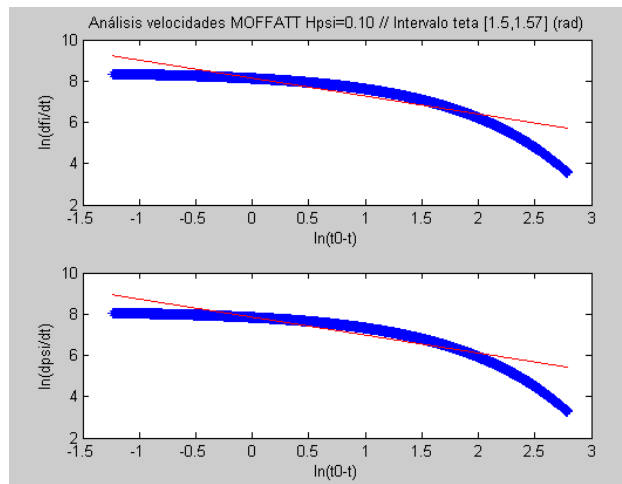


Figura 27.

$H_\psi=0,10$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[14,30]	[1,5 , 1,57]	-0,8703	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[14,30]	[1,5 , 1,57]	-0,8702	-1/6	-1/2,-2/3

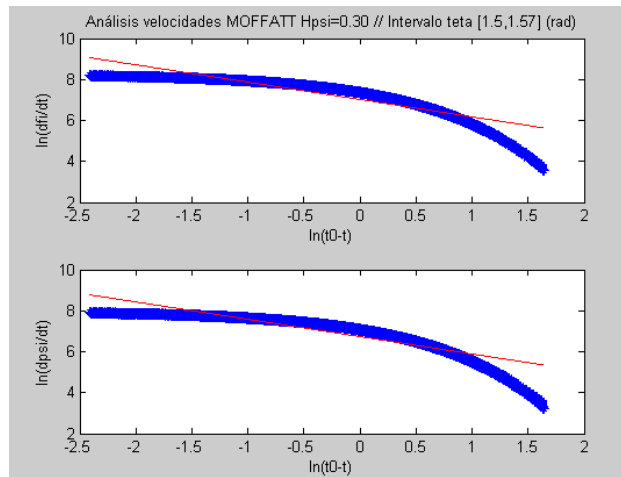


Figura 28.

$H_\psi=0,30$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[5,10]	[1,5 , 1,57]	-0,8466	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[5,10]	[1,5 , 1,57]	-0,8465	-1/6	-1/2,-2/3

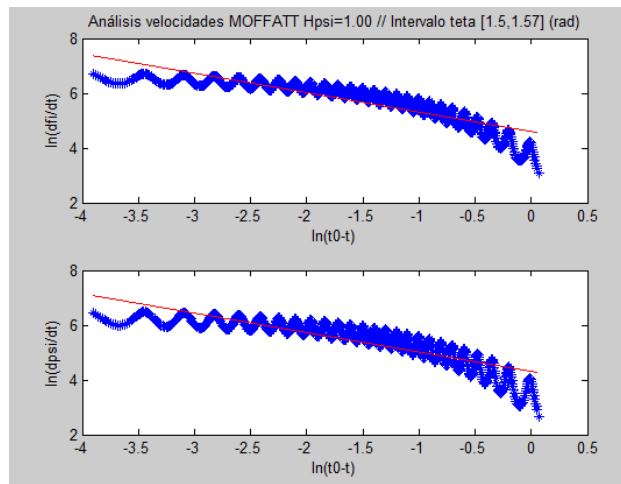


Figura 29.

$H_\psi=1,00$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[2,3]	[1,5 , 1,57]	-0,7092	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[2,3]	[1,5 , 1,57]	-0,7101	-1/6	-1/2,-2/3

Para este análisis de las velocidades, observamos como cuando el coeficiente toma valores de las milésimas las pendientes toman unos valores más cercanos a la pendiente de Moffatt [1]. Sin embargo, a medida que aumentan los coeficientes, en las centésimas, tienden a valores de β_{LEINE} .

2.7 Análisis del modelado de la disipación de Coulomb

Realizado el análisis del modelado de la fricción según la función de disipación de Rayleigh, este apartado se centra en extraer conclusiones de la fricción modelada según la ley de Coulomb. Se determinará el efecto del modelado asignado a cada ángulo por separado, C_ϕ y C_ψ . No se analizará el efecto del coeficiente C_θ debido a que produce una disipación de energía despreciable, tal y como se comprobó en el apartado 2.6.1.

Las ecuaciones diferenciales a resolver, con la ley de Coulomb implementada, son:

$$\ddot{\phi} = -\frac{2}{\cos \theta} \dot{\psi} \dot{\theta} - D_\phi \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{4}{3} \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta - D_\theta \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\psi} \dot{\theta} \tan \theta - \frac{3}{2} \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta - D_\psi \frac{\dot{\psi}}{|\dot{\psi}|}$$

El análisis se realiza, al igual que el apartado anterior, tomando las ecuaciones diferenciales y resolviendo para los diferentes valores de los coeficientes. El poder variar los coeficientes D_ϕ y D_ψ según queramos permite el estudio por separado de los modelados.

2.7.1 Análisis del modelado de Coulomb asignado al ángulo de guiñada

Comenzamos analizando el modelado C_ϕ . Para llevar a cabo dicho estudio, se seguirá la metodología implantada en el apartado 2.6, es decir, se analizará el efecto de la variación del coeficiente D_ϕ y el efecto de la fricción sobre el problema estacionario y no estacionario. Y, por último y más importante, se obtendrán los valores de las pendientes y se compararán con los resultados de Moffatt [1] y Leine [3].

2.7.1.a-Análisis de la variación de D_φ y la variación de las condiciones iniciales:

- Variación de los coeficientes D_φ :

Siguiendo la metodología del análisis de la función de disipación de Rayleigh, se resuelve el sistema de ecuaciones para las condiciones iniciales que provocan una solución estacionaria. Mientras que los valores de los coeficientes D_θ y D_ψ son igual a 0,00, el coeficiente D_φ lo variamos de la siguiente forma:

	Solución 1	Solución 2	Solución 3	Solución 4	Solución 5	Solución 6	Solución 7
D_φ	0,001	0,003	0,01	0,03	0,10	0,30	1,00

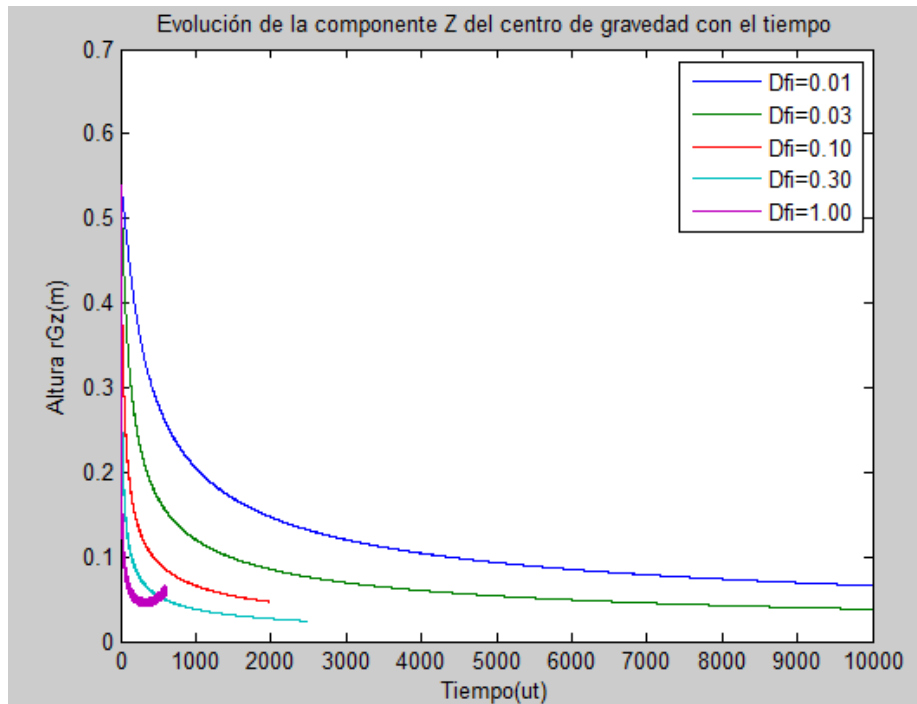


Figura 30.

Si representamos la evolución del centro de gravedad con el tiempo, obtenemos la figura 30. En ella se contemplan muchos efectos en común con la evolución de la función de Rayleigh asignada al ángulo de guiñada, por ejemplo, la mayor disipación de energía en los primeros instantes de tiempo o la no consecución por parte del disco de la cota 0.

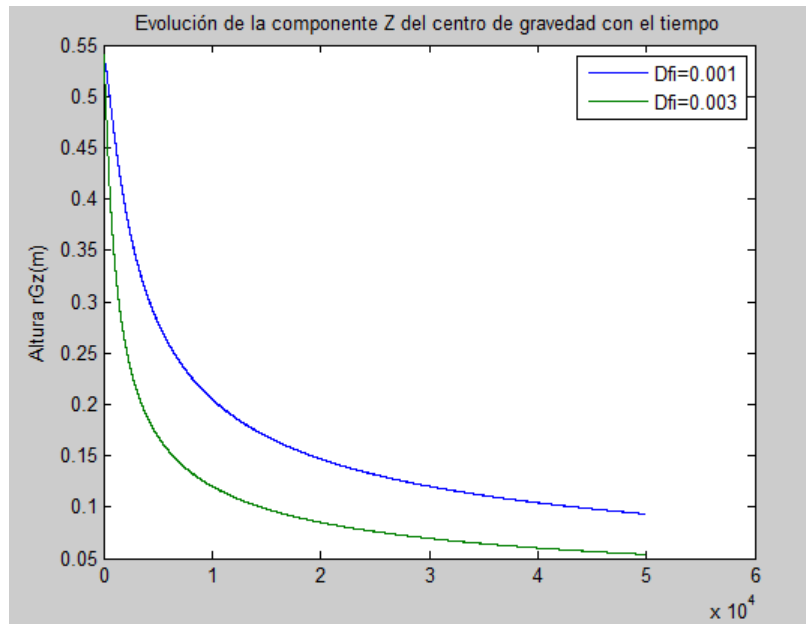


Figura 31.

En esta figura observamos como el efecto de la ley de Coulomb es muy lento, ya que el intervalo de tiempo alcanza valores de 50.000 ut. Esto se debe a que para valores de la milésima la disipación de energía es muy pequeña, explicación expuesta en el apartado 2.5.

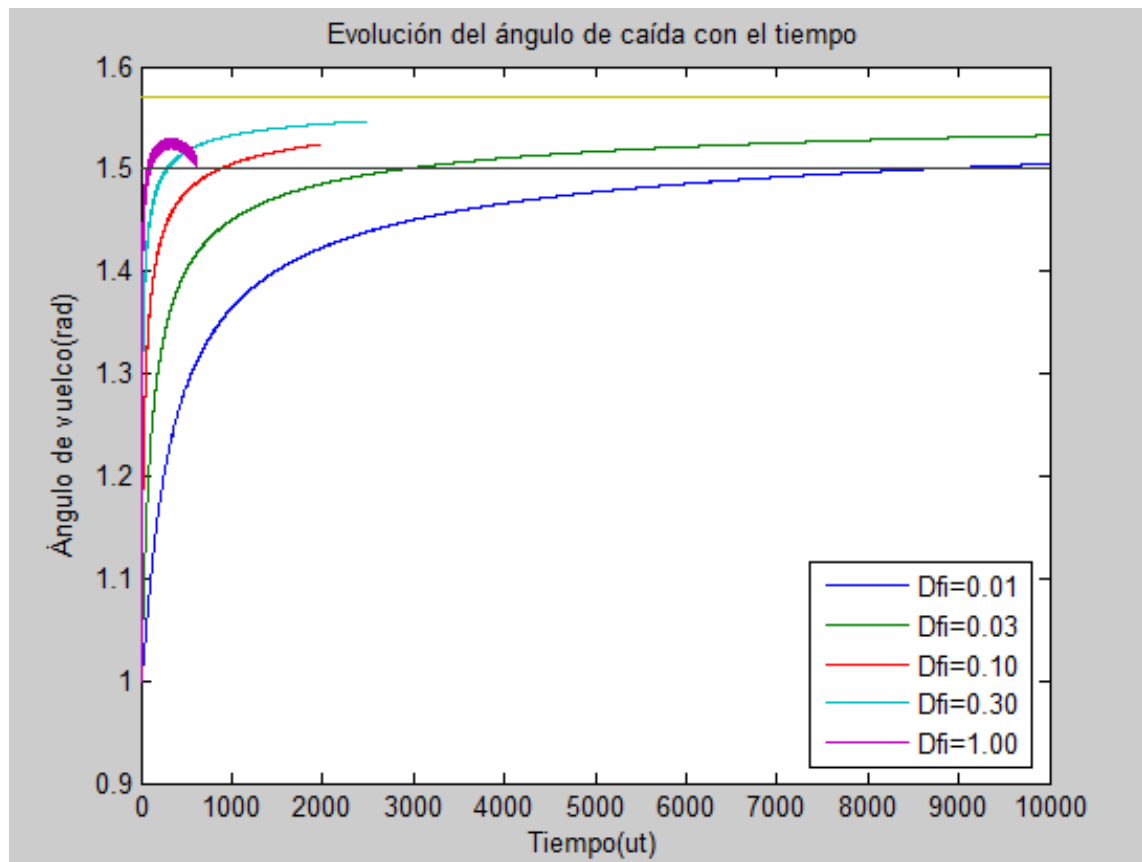


Figura 32.

Representando el desarrollo del ángulo de caída con el tiempo se corroboran los hechos observados para el CDG, una mayor disipación de energía al inicio del movimiento y, por otro lado, que no llegan a alcanzar la línea de $\pi/2$ radianes dibujada.

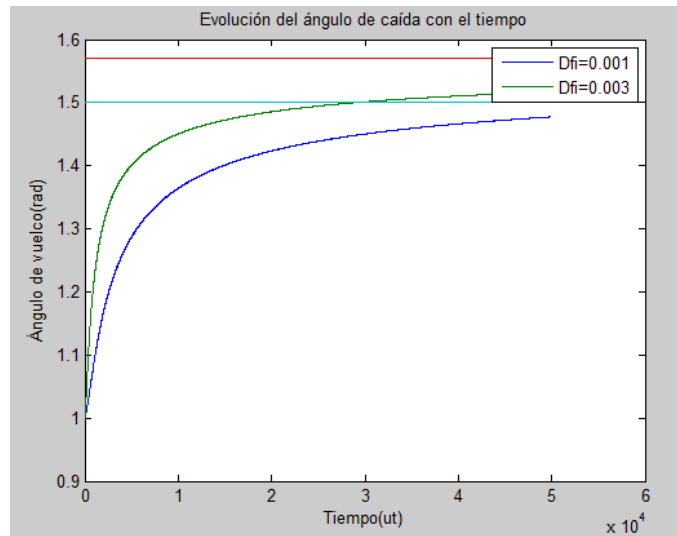


Figura 33.

Llama la atención que para la ley de Coulomb si alcanza para valores del a milésima el intervalo comprendido entre 1,5 radianes y $\pi/2$ radianes, fase final del movimiento. Este hecho no ocurría para la función F_ϕ .

- Variación de las condiciones iniciales:

Realizado el análisis para la variación del coeficiente D_ϕ , siguiendo la metodología establecida, estudiamos la variación de las condiciones iniciales. Mientras que el coeficiente D_ϕ queda fijado para 1,00, las condiciones iniciales se varían como:

- Estacionarias: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; 1, 0, -1.41]$
- No estacionarias 1: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; -1, 0, 1]$
- No estacionarias 2: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; -0.5, 0, 1]$

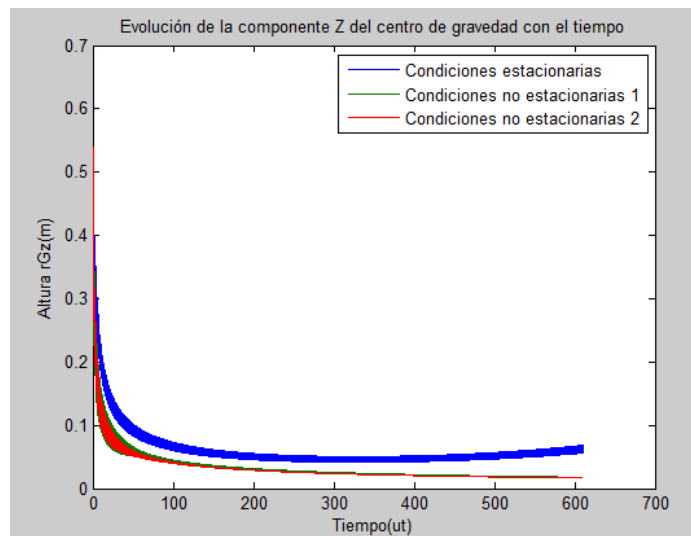


Figura 34.

En la figura 34, evolución de la componente r_z^G con el tiempo, se contempla, al igual que en el modelado de la función F_ϕ , la disipación de energía bajo condiciones iniciales no estacionarias sigue el mismo desarrollo. Además, la disipación de energía es menor bajo condiciones estacionarias, se deduce de observar como la

variación de altura del disco es menor que dicha variación para condiciones no estacionarias.

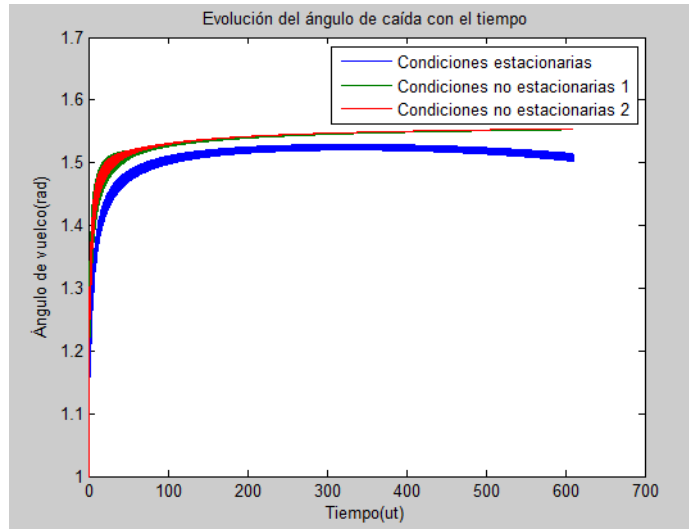


Figura 35.

Representando, figura 35, la evolución del ángulo de caída, se confirma que para condiciones no estacionarias el disco sigue el mismo desarrollo. Podemos añadir que se vuelve a percibir como la disipación de energía es menor con condiciones iniciales estacionarias.

2.7.1.b- Análisis de las pendientes β de las velocidades:

En el apartado anterior hemos estudiado los efectos que suponen la variación del coeficiente D_ϕ y la variación de las condiciones iniciales. En este apartado nos centramos en el análisis de las curvas de las velocidades, extrayendo y comparando los valores de las pendientes β .

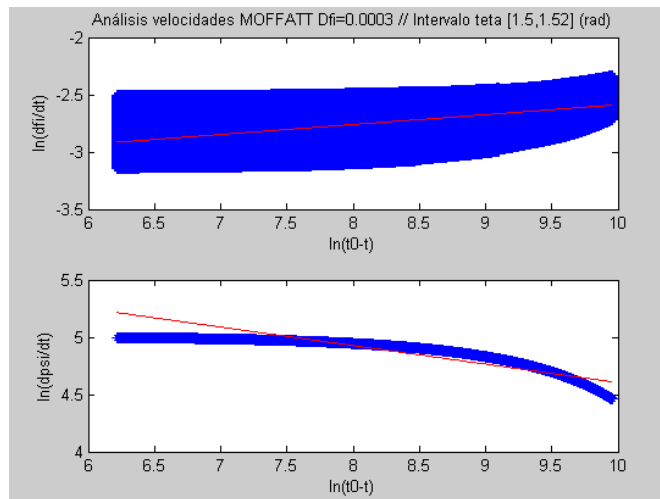


Figura 36.

$D_\phi=0,003$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[28963,49500]	[1,5 , 1,52]	0,08969	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[28963,49500]	[1,5 , 1,52]	-0,1621	-1/6	-1/2,-2/3

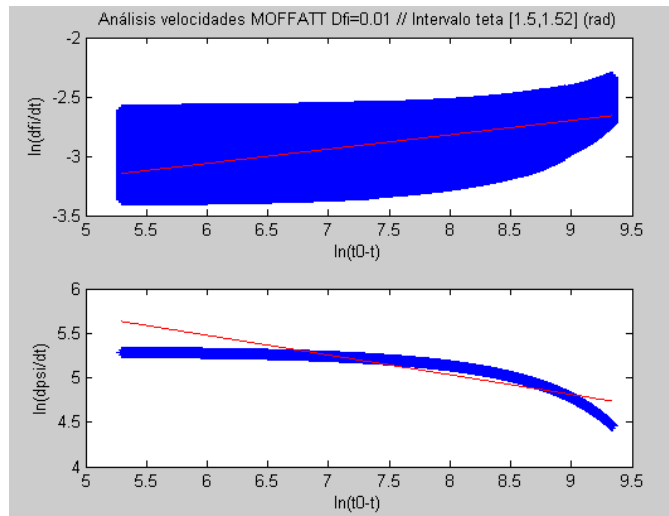


Figura 37.

$D_\phi=0,01$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[8687,9900]	[1,5 , 1,52]	0,1206	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[8687,9900]	[1,5 , 1,52]	-0,2216	-1/6	-1/2,-2/3

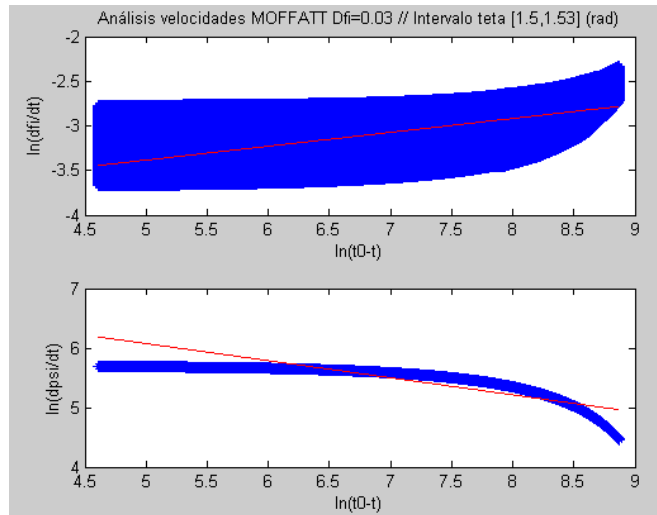


Figura 38.

$D_\phi=0,03$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[2896,9900]	[1,5 , 1,53]	0,1554	-1/6	-1/2,-2/3

ψ	[2896,9900]	[1,5 , 1,53]	-0,2873	-1/6	-1/2,-2/3
--------	-------------	--------------	---------	------	-----------

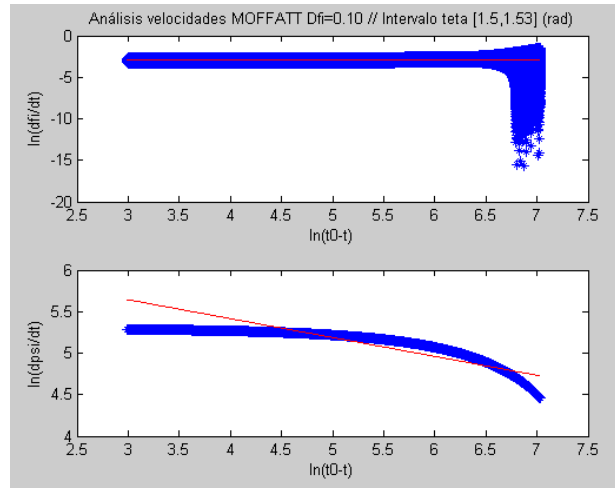


Figura 39.

$D_\varphi=0,10$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
ϕ	[870,1980]	[1,5 , 1,53]	-0,0156	-1/6	-1/2,-2/3
ψ	[870,1980]	[1,5 , 1,53]	-0,2275	-1/6	-1/2,-2/3

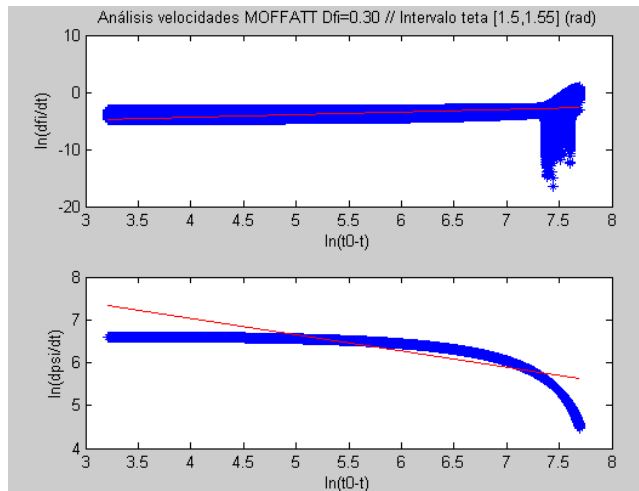


Figura 40.

$D_\varphi=0,30$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
------------------	------------------	----------------	-----------	-------------------	-----------------

$\dot{\varphi}$	[300,2475]	[1,5 , 1,55]	0,4629	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[300,2475]	[1,5 , 1,55]	-0,3804	-1/6	-1/2,-2/3

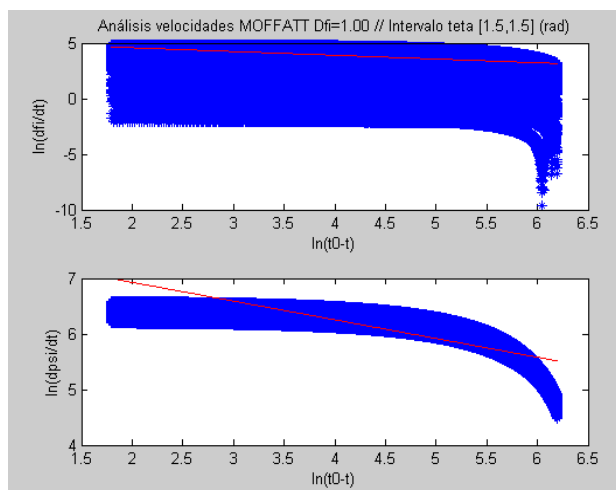


Figura 41.

$D_{\varphi}=1,00$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\varphi}$	[107,600]	[1,5 , 1,5]	-0,3371	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[107,600]	[1,5 , 1,5]	-0,3369	-1/6	-1/2,-2/3

Como podemos observar nuestro modelo numérico creado da valores de la pendiente β del orden de los valores de Moffatt [1] y Leine [3].

2.7.2 Análisis del modelado de Coulomb asignado al ángulo de rotación propia

Analizado el ángulo de guiñada, damos paso al estudio de la ley de Coulomb modelado para el ángulo de rotación propia. Siguiendo la línea de todos los apartados anteriores, analizaremos tanto la variación del coeficiente D_{ψ} como la variación de las condiciones iniciales. Finalmente, se realizará el estudio de las pendientes β .

2.7.2.a-Análisis de la variación de D_ψ y la variación de las condiciones iniciales:

- Variación de los coeficientes D_ψ :

Se inicia el análisis estudiando la variación del coeficiente D_ψ , se asigna a las condiciones iniciales los valores de solución estacionaria. Los coeficientes D_ψ toman los valores de la siguiente tabla para cada solución.

	Solución 1	Solución 2	Solución 3	Solución 4	Solución 5	Solución 6	Solución 7
D_ψ	0,001	0,003	0,01	0,03	0,10	0,30	1,00

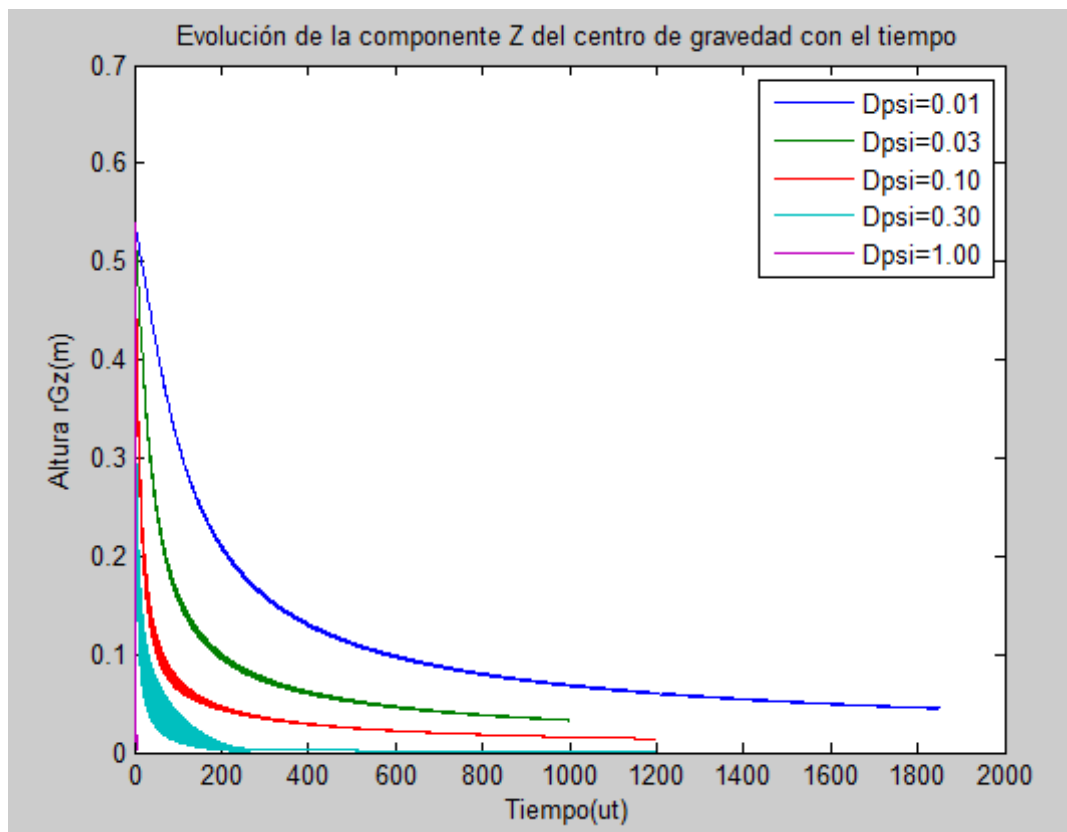


Figura 42.

Representando en la figura 42 la evolución de la componente r_z^G con el tiempo, podemos contemplar efectos ya observados en los demás modelados de la fricción. Se cumple para todos los modelados, tanto en la función de disipación de Rayleigh como en la ley de Coulomb, la disipación de energía es mayor en los primeros instantes de tiempo. Por otro lado, observamos como la ley de Coulomb asignada al ángulo de rotación propia es crítico, ya que consigue la caída del disco.

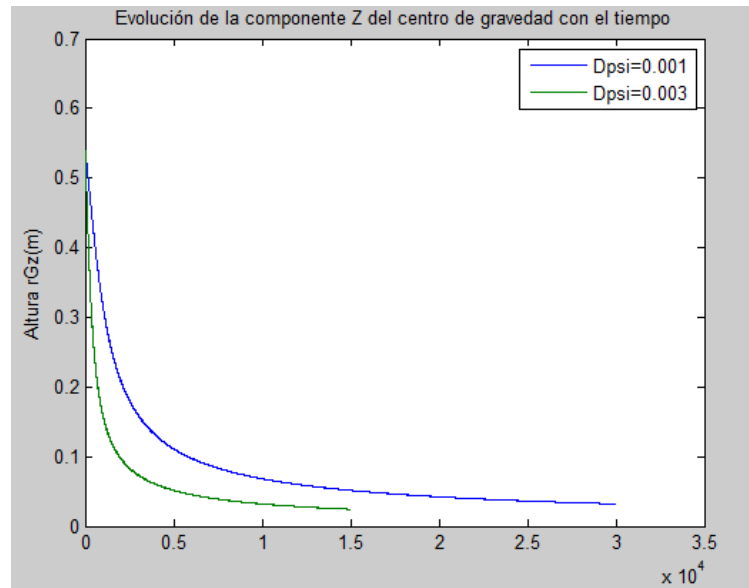


Figura 43.

En esta ocasión, podemos observar que para valores del coeficiente para la milésima como el disco si llega a su caída. Este hecho no ocurría en los demás modelados de la fricción.

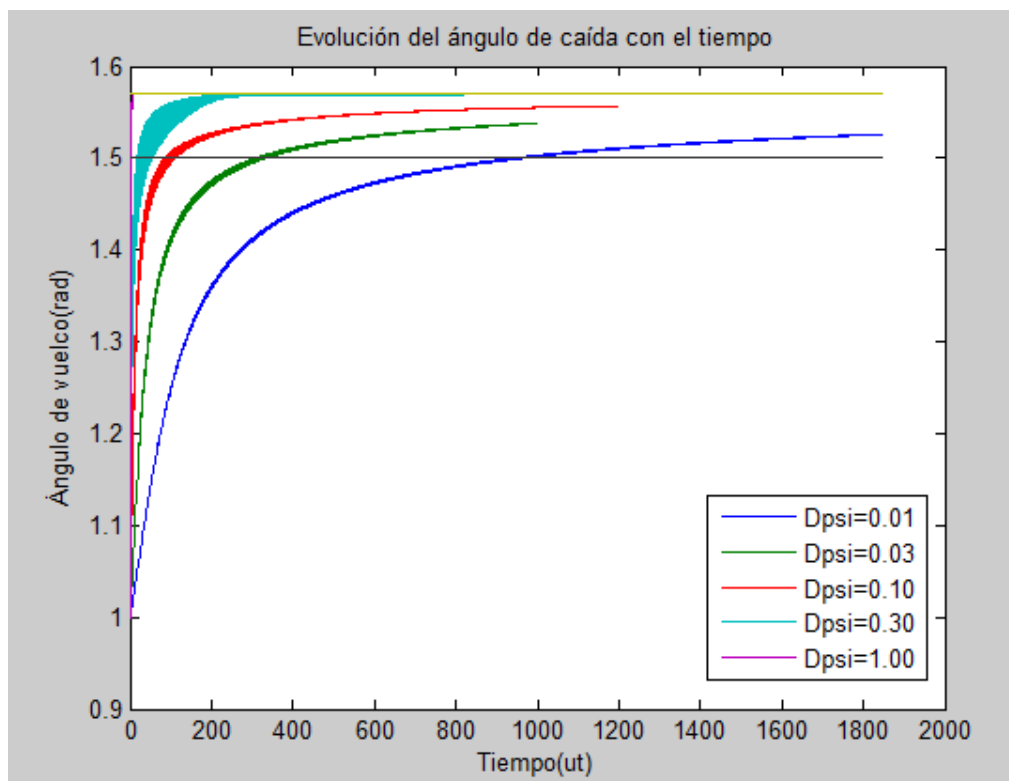


Figura 44.

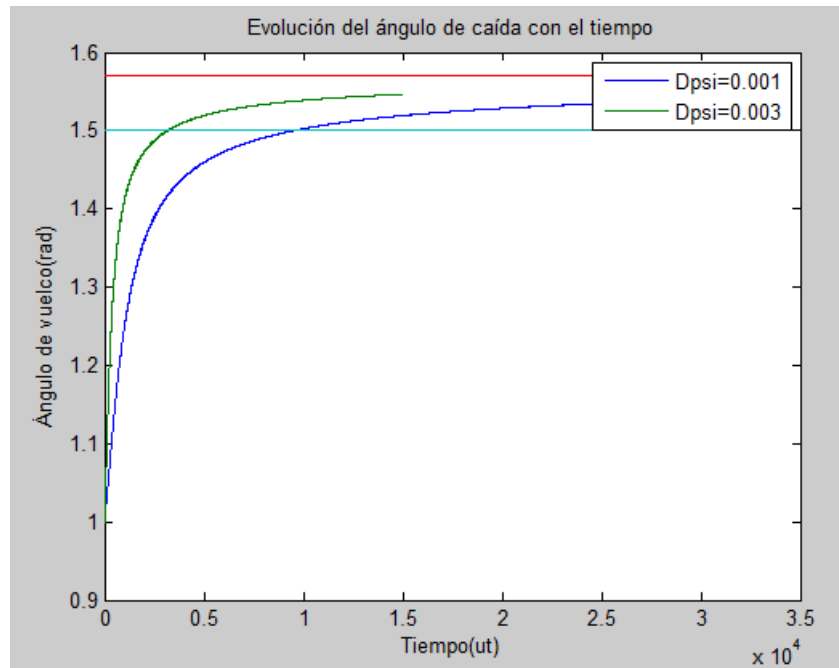


Figura 45.

Observando las dos figuras anteriores, 44 y 45, se comprueban los fenómenos observados en la evolución del centro de gravedad. Por último, cabe destacar que la ley de Coulomb asignada al ángulo de rotación propia es el modelado más crítico de todos.

- Variación de las condiciones iniciales:

Siguiendo la metodología de los análisis anteriores, evaluamos para el coeficiente $D_\psi=0,30$ las siguientes condiciones iniciales.

- Estacionarias: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; 1, 0, -1.41]$
- No estacionarias 1: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; -1, 0, 1]$
- No estacionarias 2: $[\varphi(0), \theta(0), \psi(0), \dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)] = [0, 1, 0; -0.5, 0, 1]$

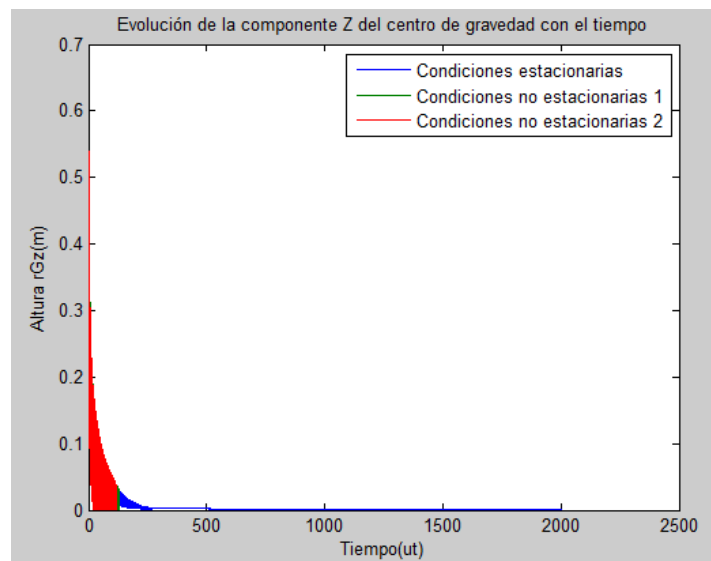


Figura 46.

Es curioso comprobar como para C_ψ el disco de Euler sigue el mismo desarrollo tanto para condiciones estacionarias como para condiciones no estacionarias. Este hecho no ocurría para ninguno de los casos anteriores.

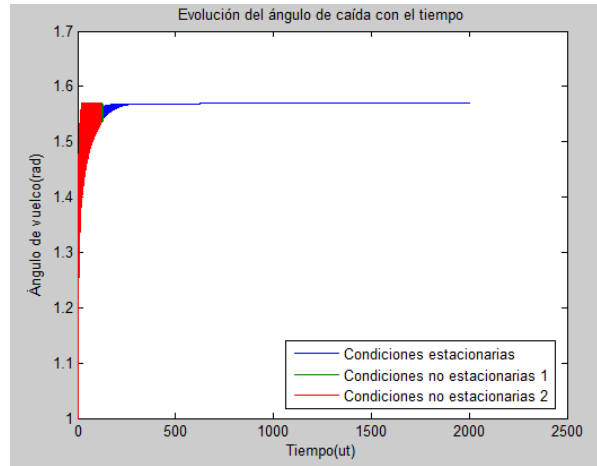


Figura 47.

Con el desarrollo del ángulo de caída queda demostrado que el disco sigue la misma evolución con el tiempo para ambos tipos de condiciones iniciales.

2.7.2.b- Análisis de las pendientes β de las velocidades:

Realizado el estudio de los efectos que suponen la variación del coeficiente D_ψ y la variación de las condiciones iniciales, continuamos con el análisis de las curvas de las velocidades, extrayendo las pendientes β y comparando con los valores de Moffatt [1] y Leine [3].

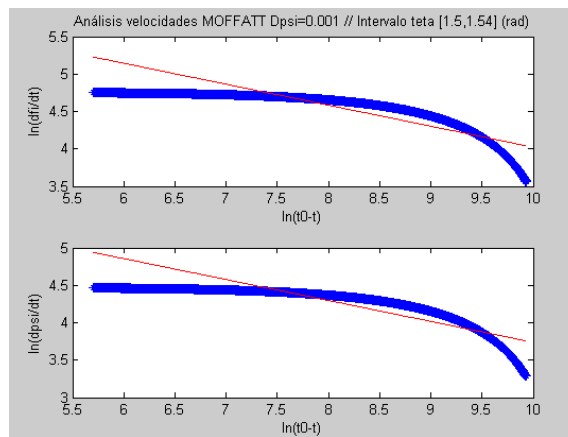


Figura 48.

$D_\psi=0,001$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
ϕ	[29600,30000]	[1,5 , 1,54]	-0,1936	-1/6	-1/2,-2/3
ψ	[29600,30000]	[1,5 , 1,54]	-0,1932	-1/6	-1/2,-2/3

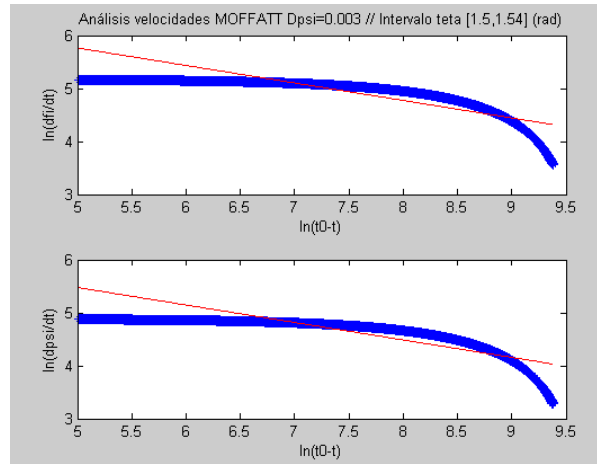


Figura 49.

$D_\psi=0,003$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[5111,15000]	[1,5 , 1,52]	-0,2677	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[5111,15000]	[1,5 , 1,52]	-0,2673	-1/6	-1/2,-2/3

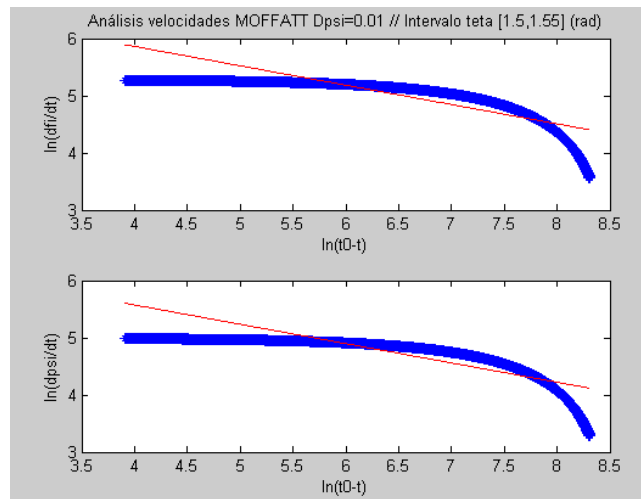


Figura 50.

$D_\psi=0,01$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[1555,5000]	[1,5 , 1,55]	-0,2830	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[1555,5000]	[1,5 , 1,55]	-0,2826	-1/6	-1/2,-2/3

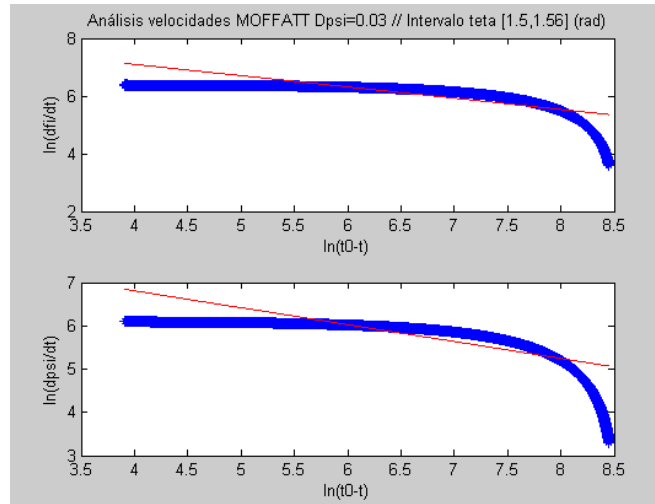


Figura 51.

$D_\psi=0,03$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[540,5000]	[1,5 , 1,56]	-0,3749	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[540,5000]	[1,5 , 1,56]	-0,3747	-1/6	-1/2,-2/3

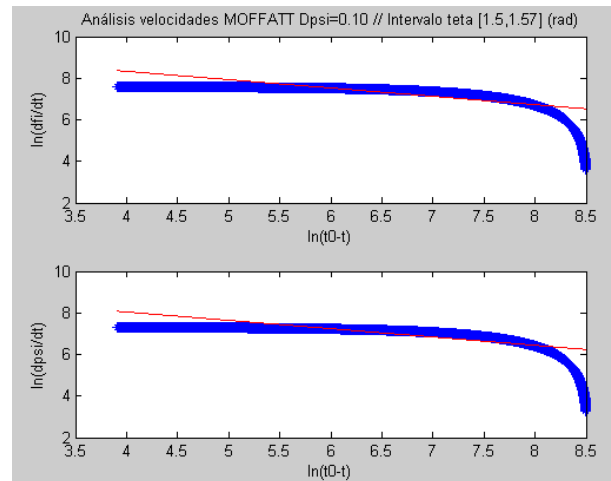


Figura 52.

$D_\psi=0,10$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[180,5000]	[1,5 , 1,57]	-0,3975	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[180,5000]	[1,5 , 1,57]	-0,39755	-1/6	-1/2,-2/3

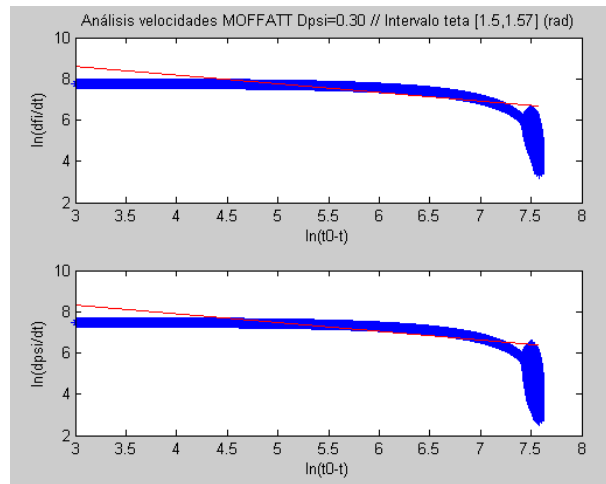


Figura 53.

$D_\psi=0,30$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[82,2000]	[1,5 , 1,57]	-0,4155	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[82,2000]	[1,5 , 1,57]	-0,4189	-1/6	-1/2,-2/3

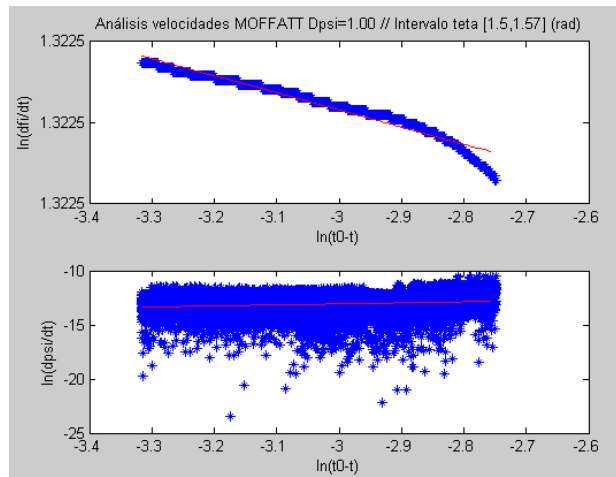


Figura 54.

$D_\psi=1,00$	Intervalo t (ut)	θ (rad)	β_q	$\beta_{MOFFATT}$	β_{LEINE}
$\dot{\phi}$	[4,5803 , 4,5896]	[1,5 , 1,57]	-7,7924·10-7	-1/6	-1/2,-2/3
$\dot{\psi}$	[4,5803 , 4,5896]	[1,5 , 1,57]	0,6457	-1/6	-1/2,-2/3

En esta ocasión el modelo numérico creado sigue dando valores de la pendiente β del orden de los valores de Moffatt [1] y Leine [3], excepto para el valor $D_\psi=1,00$. Cabe destacar que en el apartado de “Anexos” encontramos todos los valores de las pendientes resumidos en tablas.

2.8 Conclusiones del capítulo 2

Finalizado el análisis de la disipación de energía es interesante realizar un breve resumen del que extraer las conclusiones de los resultados obtenidos. Se ha creado un modelo numérico que resuelve el problema del disco de Euler con la implementación de la fricción. Dicha fricción se ha modelado mediante la función de disipación de Rayleigh y la ley de Coulomb. A continuación, se exponen las conclusiones obtenidas.

2.8.1 Conclusiones del TFG

Función de disipación de Rayleigh: $F_q = \frac{1}{2} H_q \dot{q}^2$

- F_ϕ :
 - Modelado de la fricción no crítico, ya que no consigue la parada final del disco.
 - Oscilaciones del ángulo de caída y del CDG.
 - Las condiciones no estacionarias siguen el mismo desarrollo de la disipación de energía.
 - Velocidad de rotación propia muy elevada en los instantes finales.
- F_ψ :
 - Modelado de la fricción crítico, alcanza los valores de parada final del disco.
 - Oscilaciones del ángulo de caída y del CDG.
 - Las condiciones no estacionarias no seguían la misma evolución.
 - Velocidad de rotación propia muy elevada en los instantes finales.

Ley de Coulomb: $C_q = -D_q \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|}$

- D_ϕ :
 - Modelado de la fricción crítico, alcanza los valores de parada final del disco.
 - Oscilaciones del ángulo de caída y del CDG.
 - Las condiciones no estacionarias siguen el mismo desarrollo de la disipación de energía.
 - Velocidad de rotación propia muy elevada en los instantes finales.
- D_ψ :
 - Modelado de la fricción crítico, alcanza los valores de parada final del disco.
 - Oscilaciones del ángulo de caída y del CDG.
 - Tanto las condiciones estacionarias como las condiciones no estacionarias siguen el mismo desarrollo

de la disipación de energía.

- Velocidad de rotación propia muy elevada en los instantes finales.

En común en todos los modelados se ha observado la mayor disipación de energía en los primeros instantes de tiempo. Además, las oscilaciones del ángulo de caída y del CDG durante la evolución con el tiempo. Por último, la velocidad de rotación propia tiende a infinito en los instantes finales.

2.8.2 Conclusiones de la comparación con la literatura

En este apartado secundario, se realiza la comparación con la literatura. Los resultados obtenidos del desarrollo del modelo matemático del TFG podemos compararlos con los resultados obtenidos en la literatura descrita en la Introducción general.

Euler's disk and its finite-time singularity (Moffatt) [1].

La forma de comparar el artículo de Moffatt [1] con el TFG es centrándonos en las pendientes β obtenidas. Moffatt [1] determinó $1/6$ como valor de la pendiente β . En la gran mayoría de los resultados obtenidos, se observa que el valor de las pendientes son del orden del valor obtenido en el artículo de Moffatt [1]. Se observa que el modelo descrito en el TFG no se aleja del estudio de Moffatt [1].

Dynamics of a Rolling Disk in the Presence of Dry Friction (Le Saux, Leine y Glocker) [2].

Tal y como se describe este artículo en la Introducción general del TFG, la simulación del modelo matemático de la fricción seca de este artículo se realiza dividida en cuatro partes:

- Simulación de la fricción de Coulomb: de éste apartado encontramos en común con el modelo del TFG la presencia de oscilaciones en la evolución del ángulo de caída.
- Simulación con fricción de Coulomb y de contorno: la principal observación de este apartado es la tendencia a infinito de la velocidad de rotación propia cuando el disco se encuentra en la posición horizontal. Dicho hecho se observa en todas las simulaciones que se han realizado para el modelo de este TFG, además de ser uno de los principales fenómenos llamativos del disco de Euler. Se observa tanto en los resultados del modelo del TFG como en los del artículo que la frecuencia de las oscilaciones se hace muy alta en los instantes finales.

En el resto de simulaciones realizadas en el artículo se centran en los métodos de disipación, lo que no permite comparar los resultados obtenidos con los del TFG. Sin embargo, muchos de los comportamientos del disco observados durante la simulación del modelo de la fricción seca creado por estos ingenieros son también observables en el modelo desarrollado en el TFG.

Para finalizar, el análisis de los valores de las pendientes β que se obtienen en el artículo: $-1/3$ para la fricción de contorno seca, $-1/4$ para la fricción de contorno viscosa y $-1/1$ para la fricción seca clásica son del orden, al igual que los de Moffatt [1] o Leine [3], de los obtenidos en los apartados 2.6 y 2.7.

Measurements of the Finite-time Singularity of the Euler Disk (Leine) [3].

Del artículo de Leine [3] es importante para las conclusiones que se pueden obtener del TFG el valor de la pendiente β . Determina que el valor de la pendiente se encuentra entre $1/2$ y $2/3$. Dichos valores se encuentran dentro del orden de las pendientes obtenidas en las distintas simulaciones del TFG, tal y como ya se ha comprobado en los apartados 2.6 y 2.7. Se concluye, al igual que con el artículo de Moffatt [1], que el modelo creado da resultados aceptables.

Vibrations of Euler's Disk (Villanueva y Epstein)[4].

En su artículo han introducido el estudio de las vibraciones transversales sobre el disco de Euler. Determinan, entre otras conclusiones, que el material del disco juega un papel importante. Dicha suposición se realizó en el apartado 2.5 del TFG, donde suponemos que según el material del disco se asigna un valor de los coeficientes H_q o D_q .

2.8.3 Conclusión final

Comparado el modelo creado en el TFG con los resultados de la literatura en el apartado anterior, podemos concluir que el modelo numérico que se ha creado y resuelto mediante Matlab en este TFG tiene concordancia con estudios de prestigio que pueden encontrarse en la literatura. Ya que se observan fenómenos similares a los de los otros modelos. Por otro lado, las pendientes β son, en la gran mayoría de los datos estudiados, del orden de las pendientes obtenidas en los artículos.

Para finalizar, cabe destacar las posibles mejoras futuras del proyecto como:

- 1- Un modelo Coulombiano más detallado, trabajando con multiplicadores de Lagrange para tener en cuenta el carácter variable de la fuerza de contacto.
- 2- Trabajar con otras funciones de Rayleigh más complejas.
- 3- Introducir un modelo de vibración del sólido, que dé lugar a una energía cinética de vibración, tal y como se trabaja en el artículo publicado por Villanueva y Epstein [4].

BIBLIOGRAFÍA

- [1] K. Moffatt. Euler's disk and its finite-time singularity. *Nature*, 2000.
- [2] C. Le Saux, R. Leine y C. Glocker. Dynamics of a Rolling Disk in the Presence of Dry Friction. *J. Nonlinear Sci. Vol. 15: pp. 27–61*, 2005
- [3] R. Leine. Measurements of the Finite-time Singularity of the Euler Disk. *7th EUROMECH Solid Mechanics Conference*, 2009.
- [4] R. Villanueva, M. Epstein. Vibrations of Euler's disk. *PHYSICAL REVIEW E 71, 066609*, 2005.
- [5] Damián Sánchez Pérez. Un estudio analítico y numérico del disco de Euler ideal: efecto giroscópico, estabilidad y axoides. *PFC 2011*
- [6] Manuel Toscano Jiménez. *Mecánica*. 2008
- [7] Neimark Yu. I. and Fufaev, N. A. Dynamics of Nonholonomic Systems. Translations of Mathematical Monographs. 1972

ANEXOS

ANEXO 1: Programa general.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%DEFINICIONES%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%Deficiones del disco%%
m=1; %Masa del disco
R=1; %Radio del disco
g=1; %Gravedad

%%Condiciones iniciales del vector y%%
y(1,1)=0; %Se almacena fi
y(1,2)=0; %Se almacena teta
y(1,3)=0; %Se almacena psi
y(1,4)=0; %Se almacena fipunto
y(1,5)=0; %Se almacena tetapunto
y(1,6)=0; %Se almacena psipunto

%%Definición del tiempo%%
t=[0:0.001:20];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[t,y]=ode45('ecuacionesPD',[0 20],[0;1;0;1;0;-1;0;0]);

```

ANEXO 2: ecuaciones.

```

function [dy]=ecuacionesPD(t,y);

%%Cambio de variable necesario para resolver ecuaciones de segundo
grado%%
dy1=y(4); %dy1 igual a fipunto
dy2=y(5); %dy2 igual a tetapunto
dy3=y(6); %dy3 igual a psipunto

%%Ecuaciones Neimark obtenidas del cambio de variables%%
dy4=(-2/cos(y(2)))*y(5)*y(6);
dy5=(4/3)*cos(y(2))*y(4)*y(6)+(1/2)*sin(2*y(2))*y(4)^2+(2/3)*sin(y(2))
;
dy6=(-3/2)*cos(y(2))*y(4)*y(5)+2*tan(y(2))*y(5)*y(6);
dy7=-y(6)*cos(y(1));
dy8=-y(6)*sin(y(1));

%%Creación vector contiene a las derivadas%%
dy=[dy1;dy2;dy3;dy4;dy5;dy6;dy7;dy8];
end

```

ANEXO 3: disco3D.

```

function disco3D(y)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Definiciones previas%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n=length(y); %Tamaño de la matriz (cálculo del número de instantes)
RDisco=0.5; %Radio del disco

for i=1:n

    fi=y(i,1); %Se almacena fi
    teta=y(i,2); %Se almacena teta
    psi=y(i,3); %Se almacena psi
    xc=y(i,7); %Se almacena posición xc
    yc=y(i,8); %Se almacena posición yc
    zc=0; %Restricción de contacto disco-plano XY

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%Orientación del disco%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %Matriz de orientación ángulo fi:
    Afi(1,:)= [ cos(fi), -sin(fi), 0];
    Afi(2,:)= [ sin(fi), cos(fi), 0];
    Afi(3,:)= [0, 0, 1];

    %Matriz de orientación ángulo teta:
    Ateta(1,:)= [ 1, 0, 0];
    Ateta(2,:)= [0, cos(teta), -sin(teta)];
    Ateta(3,:)= [0, sin(teta), cos(teta)];

    %Matriz de orientación ángulo psi:
    Apsi(1,:)= [ cos(psi), 0, -sin(psi)];
    Apsi(2,:)= [0, 1, 0];
    Apsi(3,:)= [sin(psi), 0, cos(psi)];

    %Calculamos la matriz de orientación del disco:
    A2=Afi*Ateta*Apsi;

    %Matriz de orientación intermedia:
    Ai2=Afi*Ateta;

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%Representación del disco%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %Cálculo del centro de gravedad del disco:
    RG2(1,1)=xc+sin(fi)*sin(teta)*RDisco;
    RG2(2,1)=yc-cos(fi)*sin(teta)*RDisco;
    RG2(3,1)=cos(teta)*RDisco;

```

```

%%DIBUJO DEL DISCO%%

%Ángulo cuyo valor varía de 0 a 2pi:
Angulodisco=0:0.01:2*pi+0.01;

%Calculamos todos los puntos del disco:
npuntosdisco=length(Angulodisco);
for k=1:npuntosdisco
    rPDisco(1:3,k)=RG2+A2*[RDisco*cos(Angulodisco(k)) 0
RDisco*sin(Angulodisco(k))]' ;
end

%%DIBUJO DEL PUNTO DE CONTACTO%%

psi0=y(3,1);
Rcontacto=0.02;
puntoC=[xc yc zc]';
for j=1:npuntosdisco
    rContactoAnterior(1:3,j)=RG2+Ai2*[RDisco*cos(psi+psi0) 0
RDisco*sin(psi+psi0)]'+[Rcontacto*cos(Angulodisco(j)) 0
Rcontacto*sin(Angulodisco(j))]' ;
end

%%DIBUJO DE RADIOS AUXILIARES%%

%Longitud radio 1:
Radiol=0:0.01:RDisco;

%Calculamos puntos de un radio:
npuntosradiol=length(Radiol);
for k11=1:npuntosradiol
    rPRadiol1(1:3,k11)=RG2+A2*[Radiol(k11)*cos(psi) 0
Radiol(k11)*sin(psi)]';
end

for k12=1:npuntosradiol
    rPRadiol2(1:3,k12)=RG2-A2*[Radiol(k12)*cos(psi) 0
Radiol(k12)*sin(psi)]';
end

%Calculamos puntos de un radio:
npuntosradiol=length(Radiol);
for k11=1:npuntosradiol
    rPRadiol1Mov(1:3,k11)=RG2+Ai2*[Radiol(k11)*cos(psi) 0
Radiol(k11)*sin(psi)]';
end

for k12=1:npuntosradiol
    rPRadiol2Mov(1:3,k12)=RG2-Ai2*[Radiol(k12)*cos(psi) 0
Radiol(k12)*sin(psi)]';
end

%Longitud radio 2:
Radio2=0:0.01:RDisco;

%Calculamos puntos de un radio:
npuntosradio2=length(Radio2);
for k21=1:npuntosradio2

```

```

        rPRadio21(1:03,k21)=RG2+A2*[Radio2(k21)*cos(psi+pi/2) 0
Radio2(k21)*sin(psi+pi/2)]';
    end

    for k22=1:npuntosradio2
        rPRadio22(1:3,k22)=RG2-A2*[Radio1(k22)*cos(psi+pi/2) 0
Radio1(k22)*sin(psi+pi/2)]';
    end

    %%DIBUJO EJES DE REFERENCIA%%

    %Calculo ejes de referencia:
    npuntosvertical=length(Radio2);
    for k21=1:npuntosvertical
        rPVertical1(1:3,k21)=RG2+[0 0 Radio2(k21)]';
        rPVertical2(1:3,k21)=RG2+[0 0 -Radio2(k21)]';
        rPHorizontal1(1:3,k21)=RG2+[Radio2(k21) 0 0]';
        rPHorizontal2(1:3,k21)=RG2+[-Radio2(k21) 0 0]';
        rPHorizontal3(1:3,k21)=RG2+[0 Radio2(k21) 0]';
        rPHorizontal4(1:3,k21)=RG2+[0 -Radio2(k21) 0]';
    end

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%Representación 3D%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%REPRESENTACIONES GRÁFICAS%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    %%REPRESENTACIÓN DEL DISCO%%

    q1 =
    plot3(rPDisco(1,:),rPDisco(2,:),rPDisco(3:),'XDataSource','rPDisco(1,
:)', 'YDataSource','rPDisco(2:)', 'ZDataSource','rPDisco(3:)' );
    hold on;

    %%REPRESENTACIÓN DE LOS RADIOS AUXILIARES%%

    q2 =
    plot3(rPRadio11(1,:),rPRadio11(2,:),rPRadio11(3:),'XDataSource','rPRA
dio11(1:)', 'YDataSource','rPRadio11(2:)', 'ZDataSource','rPRadio11(3,
:)' );
    q3 =
    plot3(rPRadio12(1,:),rPRadio12(2,:),rPRadio12(3:),'XDataSource','rPRA
dio12(1:)', 'YDataSource','rPRadio12(2:)', 'ZDataSource','rPRadio12(3,
:)' );
    q4 =
    plot3(rPRadio21(1,:),rPRadio21(2,:),rPRadio21(3:),'XDataSource','rPRA
dio21(1:)', 'YDataSource','rPRadio21(2:)', 'ZDataSource','rPRadio21(3,
:)' );
    q5 =
    plot3(rPRadio22(1,:),rPRadio22(2,:),rPRadio22(3:),'XDataSource','rPRA
dio22(1:)', 'YDataSource','rPRadio22(2:)', 'ZDataSource','rPRadio22(3,
:)' );
    q6=
    plot3(rPRadio11Mov(1,:),rPRadio11Mov(2,:),rPRadio11Mov(3:),'r','XData

```

```

Source', 'rPRadiol1Mov(1,:)','YDataSource','rPRadiol1Mov(2,:)','ZDataSo
urce','rPRadiol1Mov(3,:)');
    q7=
plot3(rPRadio12Mov(1,:),rPRadio12Mov(2,:),rPRadio12Mov(3:),'r','XData
Source','rPRadio12Mov(1,:)','YDataSource','rPRadio12Mov(2,:)','ZDataSo
urce','rPRadio12Mov(3,:)');

    %%REPRESENTACIÓN EJES AUXIALIARES%%

    q8 =
plot3(rPVertical1(1,:),rPVertical1(2,:),rPVertical1(3:),'g','XDataSou
rce','rPVertical1(1,:)','YDataSource','rPVertical1(2,:)','ZDataSource'
,'rPVertical1(3,:)');
    q9 =
plot3(rPVertical2(1,:),rPVertical2(2,:),rPVertical2(3:),'g','XDataSou
rce','rPVertical2(1,:)','YDataSource','rPVertical2(2,:)','ZDataSource'
,'rPVertical2(3,:)');
    q10 =
plot3(rPHorizontal1(1,:),rPHorizontal1(2,:),rPHorizontal1(3:),'g','XD
ataSource','rPHorizontal1(1,:)','YDataSource','rPHorizontal1(2,:)','ZD
ataSource','rPHorizontal1(3,:)');
    q11 =
plot3(rPHorizontal2(1,:),rPHorizontal2(2,:),rPHorizontal2(3:),'g','XD
ataSource','rPHorizontal2(1,:)','YDataSource','rPHorizontal2(2,:)','ZD
ataSource','rPHorizontal2(3,:)');
    q12 =
plot3(rPHorizontal3(1,:),rPHorizontal3(2,:),rPHorizontal3(3:),'g','XD
ataSource','rPHorizontal3(1,:)','YDataSource','rPHorizontal3(2,:)','ZD
ataSource','rPHorizontal3(3,:)');
    q13 =
plot3(rPHorizontal4(1,:),rPHorizontal4(2,:),rPHorizontal4(3:),'g','XD
ataSource','rPHorizontal4(1,:)','YDataSource','rPHorizontal4(2,:)','ZD
ataSource','rPHorizontal4(3,:)');

    %%REPRESNTACIÓN PUNTO AUXILIAR%%

    q14 =
plot3(rContactoAnterior(1,:),rContactoAnterior(2,:),rContactoAnterior(
3:),'r','XDataSource','rContactoAnterior(1,:)','YDataSource','rContac
toAnterior(2,:)','ZDataSource','rContactoAnterior(3,:)');

    grid on
    title('SIMULACIÓN 3D DEL DISCO DE EULER')
    xlabel('EJE X')
    ylabel('EJE Y')
    zlabel('EJE Z')
    axis equal;

end
hold on

%%DIBUJO DE LA TRAYECTORIA SEGUIDA%%

z1=zeros(1,length(y));
plot3(y(:,7),y(:,8),z1')
axis equal;

```

ANEXO 4: AnalisisFriccion.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%TRABAJO FIN DE GRADO - JAVIER ESCUDERO MUÑOZ%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tic
clc
close all
clear all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%DEFINICIONES%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%Deficiones del disco%%
m=1; %Masa del disco
R=1;%Radio del disco
g=1; %Gravedad

%%Condiciones iniciales del vector y%%
y(1,1)=0; %Se almacena fi
y(1,2)=0; %Se almacena teta
y(1,3)=0; %Se almacena psi
y(1,4)=0; %Se almacena fipunto
y(1,5)=0; %Se almacena tetapunto
y(1,6)=0; %Se almacena psipunto

%%Definición del tiempo%%
t=[0:0.01:12010];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[t,y]=ode45('ecuacionesPDFriccion',[0 12010],[0;1;0;1;0;-1.41;0;0]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%CÁLCULOS EXTRAS%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Cálculo del centro de gravedad del disco%
n=length(t);
for j=1:n
RG2(1,j)=y(j,7)+sin(y(j,1))*sin(y(j,2))*R;
RG2(2,j)=y(j,8)-cos(y(j,1))*sin(y(j,2))*R;
RG2(3,j)=cos(y(j,2))*R;
end

Y=[y t RG2'];
toc

```

ANEXO 5: EcuacionesPDFriccion.

```

function [dy]=ecuacionesPDFriccion(t,y);
hteta=0.00; %Coeficiente función de disipación de Rayleigh (ángulo de
caída)
hfi=0.00; %Coeficiente función de disipación de Rayleigh (ángulo de
guiñada)
hpsi=0.00; %Coeficiente función de disipación de Rayleigh (ángulo de
rotación propia)
Dteta=0.00; %Coeficiente ley de Coulomb (ángulo de caída)
Dfi=0.00; %Coeficiente ley de Coulomb (ángulo de guiñada)
Dpsi=0.00; %Coeficiente ley de Coulomb (ángulo de rotación propia)

%%Cambio de variable necesario para resolver ecuaciones de segundo
grado%%
dy1=y(4); %dy1 igual a fipunto
dy2=y(5); %dy2 igual a tetapunto
dy3=y(6); %dy3 igual a psipunto

%%Ecuaciones Neimark obtenidas del cambio de variables%%
dy4=(-2/cos(y(2)))*y(5)*y(6)-Dfi*y(4)/abs(y(4))-hfi*y(4);
dy5=(4/3)*cos(y(2))*y(4)*y(6)+(1/2)*sin(2*y(2))*y(4)^2+(2/3)*sin(y(2))
-Dteta-hteta*y(5);
dy6=(-3/2)*cos(y(2))*y(4)*y(5)+2*tan(y(2))*y(5)*y(6)-
Dpsi*y(6)/abs(y(6))-hpsi*y(6);
dy7=-y(6)*cos(y(1));
dy8=-y(6)*sin(y(1));

%%Creación vector contiene a las derivadas%%
dy=[dy1;dy2;dy3;dy4;dy5;dy6;dy7;dy8];
end

```

Anexo 6: PostProcesado1.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%TRABAJO FIN DE GRADO - JAVIER ESCUDERO MUÑOZ%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
close all
clear all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%CARGA DE FICHEROS%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

load hpsi0001.txt;
[y0001, t0001, RGz0001]=ReordenaDatos(hpsi0001);
clear hpsi0001;
teta0001=y0001(:,2);
clear y0001;

load hpsi0003.txt;
[y0003, t0003, RGz0003]=ReordenaDatos(hpsi0003);
clear hpsi0003;
teta0003=y0003(:,2);
clear y0003;

load hpsi001.txt;
[y001, t001, RGz001]=ReordenaDatos(hpsi001);
clear hpsi001;
teta001=y001(:,2);
clear y001;

load hpsi003.txt;
[y003, t003, RGz003]=ReordenaDatos(hpsi003);
clear hpsi003;
teta003=y003(:,2);
clear y003;

load hpsi010.txt;
[y010, t010, RGz010]=ReordenaDatos(hpsi010);
clear hpsi010;
teta010=y010(:,2);
clear y010;

load hpsi030.txt;
[y030, t030, RGz030]=ReordenaDatos(hpsi030);
clear hpsi030;
teta030=y030(:,2);
clear y030;

load hpsi100.txt;
[y100, t100, RGz100]=ReordenaDatos(hpsi100);
clear hpsi100;
teta100=y100(:,2);
clear y100;
```



```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%DESGLOSE MATRICES%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

t1571=0:0.1:t0001(1,length(t0001));
t1572=0:0.1:t001(1,length(t001));

for i=1:length(t1571)
    y1571(i,1)=1.57;
    y1501(i,1)=1.5;
end

for i=1:length(t1572)
    y1572(i,1)=1.57;
    y1502(i,1)=1.5;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%POSTPROCESADO DE DATOS%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

figure(1)
plot(t001,RGz001,t003,RGz003,t010,RGz010,t030,RGz030,t100,RGz100)
xlabel('Tiempo(ut)')
ylabel('Altura rGz(m)')
title('Evolución de la componente Z del centro de gravedad con el tiempo')
legend('hpsi=0.01','hpsi=0.03','hpsi=0.10','hpsi=0.30','hpsi=1.00')

figure(2)
plot(t001,teta001,t003,teta003,t010,teta010,t030,teta030,t100,teta100,
t1572,y1572,t1572,y1502)
xlabel('Tiempo(ut)')
ylabel('Ángulo de vuelco(rad)')
title('Evolución del ángulo de caída con el tiempo')
legend('hpsi=0.01','hpsi=0.03','hpsi=0.10','hpsi=0.30','hpsi=1.00')

figure(3)
plot(t0001,RGz0001,t0003,RGz0003)
ylabel('Altura rGz(m)')
title('Evolución de la componente Z del centro de gravedad con el tiempo')
legend('hpsi=0.001','hpsi=0.003')

figure(4)
plot(t0001,teta0001,t0003,teta0003,t1571,y1571,t1571,y1501)
xlabel('Tiempo(ut)')
ylabel('Ángulo de vuelco(rad)')
title('Evolución del ángulo de caída con el tiempo')
legend('hpsi=0.001','hpsi=0.003')

```

Anexo 7: PostProcesado2.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%TRABAJO FIN DE GRADO - JAVIER ESCUDERO MUÑOZ%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tic
clc
close all
clear all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%CARGA DE FICHEROS%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

load Dpsi100.txt;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%REORDENADAR DATOS%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

[y, t, RGz]=ReordenaDatos(Dpsi100);

clear Dpsi100;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%DESGLOSE MATRICES%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

teta=y(:,2);

dfi=y(:,4);
dteta=y(:,5);
dpsi=y(:,6);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%LIMPIEZA SISTEMA%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear y;
clear RGz;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%BÚSQUEDA DE RANGO TETA ENTRE 1/2 Y PI/2%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for i=1:length(t)
    tet=teta(i,1);
    if tet>=1.48 && tet<=1.50
        i1=i;
    end
end
clear i;
clear tet;
TTDE15=t(1,i1)

```

```

%%%%%%%%%%
%%Cálculo de t0%%
%%%%%%%%%%
t0=t(1,length(t));

%%%%%%%%%%
%%Cálculo tfinal%%
%%%%%%%%%%
tfinalt0=t0-0.01*t0;
tfinalt01=tfinalt0-0.01;
tfinalt02=tfinalt0+0.01;
for i=1:length(t)
    tbusqueda=t(1,i);
    if tbusqueda>=tfinalt01 && tbusqueda<=tfinalt02
        i2=i;
    end
end
TTFINAL=t(1,i2)
tet=teta(i2,1)
clear i;
clear tbusqueda;
clear tfinalt01;
clear tfinalt02;

%%%%%%%%%%
%%CÁLCULOS%%
%%%%%%%%%%
k=1;
for j=i1:i2
    dfialfa(k,1)=dfi(j,1);
    dtetaalfa(k,1)=dteta(j,1);
    dpsialfa(k,1)=dpsi(j,1);
    tpalfa(1,k)=t0-t(1,j);
    k=k+1;
end
clear k;
clear j;
clear i1;
clear i2;

logtalfa=log(tpalfa);
logdfialfa=log(abs(dfialfa));
logdtetaalfa=log(abs(dtetaalfa));
logdpsialfa=log(abs(dpsialfa));

clear teta;
clear tpalfa;
clear t;
clear dfi;
clear dteta;
clear dpsi;
clear dfialfa;
clear dtetaalfa;
clear dpsialfa;

talfafinal=logtalfa';
Cfi=polyfit(talfafinal,logdfialfa,1);
xfi=[talfafinal(length(talfafinal),1):0.01:talfafinal(1,1)];
yfi=Cfi(1,1)*xfi+Cfi(1,2);

```

```
Cpsi=polyfit(talfafinal,logdpsialfa,1);
xpsi=[talfafinal(length(talfafinal),1):0.01:talfafinal(1,1)];
ypsi=Cpsi(1,1)*xpsi+Cpsi(1,2);

Cteta=polyfit(talfafinal,logdtetaalfa,1);
xteta=[talfafinal(length(talfafinal),1):0.01:talfafinal(1,1)];
yteta=Cteta(1,1)*xteta+Cteta(1,2);

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(talfafinal,logdfialfa,'*',xfi,yfi,'r')
title({'Análisis velocidades MOFFATT Dpsi=1.00 // Intervalo teta
[1.5,1.57] (rad)'})
xlabel('ln(t0-t)')
ylabel('ln(dfi/dt)')
subplot(2,1,2)
plot(talfafinal,logdpsialfa,'*',xpsi,ypsi,'r')
xlabel('ln(t0-t)')
ylabel('ln(dpsi/dt)')

toc
```

TABLAS

TABLA 1: Función de Rayleigh asignada al ángulo de guiñada:

$$F_\phi = \frac{1}{2} H_\phi \dot{\phi}^2$$

$H_\phi = 0,001$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	No	alcanza	rango $[1,5, \pi/2]$ rad.
$\dot{\psi}$	No	alcanza	rango $[1,5, \pi/2]$ rad.
$\dot{\theta}$	No	alcanza	rango $[1,5, \pi/2]$ rad.
$H_\phi = 0,003$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	No	alcanza	rango $[1,5, \pi/2]$ rad.
$\dot{\psi}$	No	alcanza	rango $[1,5, \pi/2]$ rad.
$\dot{\theta}$	No	alcanza	rango $[1,5, \pi/2]$ rad.
$H_\phi = 0,01$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	No	alcanza	rango $[1,5, \pi/2]$ rad.
$\dot{\psi}$	No	alcanza	rango $[1,5, \pi/2]$ rad.
$\dot{\theta}$	No	alcanza	rango $[1,5, \pi/2]$ rad.

$H_\phi = 0,03$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	No	alcanza	rango [1,5 , $\pi/2$] rad.
$\dot{\psi}$	No	alcanza	rango [1,5 , $\pi/2$] rad.
$\dot{\theta}$	No	alcanza	rango [1,5 , $\pi/2$] rad.
$H_\phi = 0,10$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	No	alcanza	rango [1,5 , $\pi/2$] rad.
$\dot{\psi}$	No	alcanza	rango [1,5 , $\pi/2$] rad.
$\dot{\theta}$	No	alcanza	rango [1,5 , $\pi/2$] rad.
$H_\phi = 0,30$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	[2375,9900]	0,1101	-3,6939
$\dot{\psi}$	[2375,9900]	-0,2188	6,8219
$\dot{\theta}$	[2375,9900]	-0,1143	-8,4187
$H_\phi = 1,00$	Tiempo (ut)	β_q	N_q
$\dot{\phi}$	[706,9900]	0,1425	-4,3258
$\dot{\psi}$	[706,9900]	-0,2828	8,0832
$\dot{\theta}$	[706,9900]	-0,0457	-9,5404

TABLA 2: Función de Rayleigh asignada al ángulo de rotación propia:

$$F_{\psi} = \frac{1}{2} H_{\psi} \psi^2$$

$H_{\psi}=0,001$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[8700,11900]	0,0535	-2,9871
$\dot{\psi}$	[8700,11900]	-0,1070	5,4014
$\dot{\theta}$	[8700,11900]	0,0363	-7,9547
$H_{\psi}=0,003$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[8700,11900]	0,0535	-2,9871
$\dot{\psi}$	[8700,11900]	-0,1070	5,4014
$\dot{\theta}$	[8700,11900]	0,0363	-7,9547
$H_{\psi}=0,01$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[138,250]	-0,7511	8,3207
$\dot{\psi}$	[138,250]	-0,7507	8,0321
$\dot{\theta}$	[138,250]	0,1507	-6,9583

$H_{\psi} =0,03$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[46,89]	-0,8088	8,1924
$\dot{\psi}$	[46,89]	-0,8086	7,9043
$\dot{\theta}$	[46,89]	0,0776	-5,4854
$H_{\psi} =0,10$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[14,30]	-0,8703	8,1420
$\dot{\psi}$	[14,30]	-0,8702	7,8543
$\dot{\theta}$	[14,30]	0,0523	-4,1145
$H_{\psi} =0,30$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[5,10]	-0,8466	7,0244
$\dot{\psi}$	[5,10]	-0,8465	6,7370
$\dot{\theta}$	[5,10]	0,0339	-2,7760

$H_\psi = 1,00$	Tiempo (ut)	β_q	N_q
$\dot{\varphi}$	[2,3]	-0,7092	4,6021
$\dot{\psi}$	[2,3]	-0,7101	4,3080
$\dot{\theta}$	[2,3]	0,0069	-1,3689

TABLA 3: Modelado de Coulomb asignado al ángulo de guiñada:

$$C_\varphi = -D_\varphi \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}$$

$D_\phi = 0,001$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	No	alcanza	rango [1,5 , $\pi/2$] rad.
$\dot{\psi}$	No	alcanza	rango [1,5 , $\pi/2$] rad.
$\dot{\theta}$	No	alcanza	rango [1,5 , $\pi/2$] rad.
$D_\phi = 0,003$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[28963,49500]	0,08969	-3,4554
$\dot{\psi}$	[28963,49500]	-0,1621	6,2241
$\dot{\theta}$	[28963,49500]	0,0069	-7,7591
$D_\phi = 0,01$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[8687,9900]	0,1206	-3,7841
$\dot{\psi}$	[8687,9900]	-0,2216	6,8065
$\dot{\theta}$	[8687,9900]	0,0592	-8,2339

$D_\phi=0,03$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	[2896,9900]	0,1554	-4,1601
$\dot{\psi}$	[2896,9900]	-0,2873	7,5117
$\dot{\theta}$	[2896,9900]	0,1505	-9,0599
$D_\phi=0,10$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	[870,1980]	-0,0156	-2,8162
$\dot{\psi}$	[870,1980]	-0,2275	6,3259
$\dot{\theta}$	[870,1980]	0,5882	-10,7570
$D_\phi=0,30$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	[300,2475]	0,4629	-6,2358
$\dot{\psi}$	[300,2475]	-0,3804	8,5555
$\dot{\theta}$	[300,2475]	0,7432	-12,6623
$D_\phi=1,00$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	[107,600]	-0,3371	5,2522
$\dot{\psi}$	[107,600]	-0,3369	7,6028
$\dot{\theta}$	[107,600]	-0,3992	2,4325

TABLA 4: Modelado de Coulomb asignado al ángulo de rotación propia:

$$C_{\psi} = -D_{\psi} \frac{\dot{\psi}}{|\dot{\psi}|}$$

$D_{\psi}=0,001$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[29600,30000]	-0,1936	6,1370
$\dot{\psi}$	[29600,30000]	-0,1932	5,8475
$\dot{\theta}$	[29600,30000]	0,0030	-7,6873
$D_{\psi}=0,003$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[5111,15000]	-0,2677	6,9546
$\dot{\psi}$	[5111,15000]	-0,2673	6,6649
$\dot{\theta}$	[5111,15000]	0,0039	-7,6902
$D_{\psi}=0,01$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[1555,5000]	-0,2830	6,8653
$\dot{\psi}$	[1555,5000]	-0,2826	6,5761
$\dot{\theta}$	[1555,5000]	0,7010	-11,8870

$D_{\psi} =0,03$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[540,5000]	-0,3749	8,5588
$\dot{\psi}$	[540,5000]	-0,3747	8,2703
$\dot{\theta}$	[540,5000]	0,4283	-10,3603
$D_{\psi} =0,10$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\varphi}$	[180,5000]	-0,3975	9,9142
$\dot{\psi}$	[180,5000]	-0,39755	9,6263
$\dot{\theta}$	[180,5000]	0,1924	-8,8988

$D_\psi = 0,30$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	[82,2000]	-0,4155	9,8362
$\dot{\psi}$	[82,2000]	-0,4189	9,5675
$\dot{\theta}$	[82,2000]	0,4229	-9,9814
$D_\psi = 1,00$	Tiempo (ut)	β_q	M_q
$\dot{\phi}$	[4,5803 , 4,5896]	$-7,7924 \cdot 10^{-7}$	1,3225
$\dot{\psi}$	[4,5803 , 4,5896]	0,6457	-11,1029
$\dot{\theta}$	[4,5803 , 4,5896]	-0,0484	0,0624